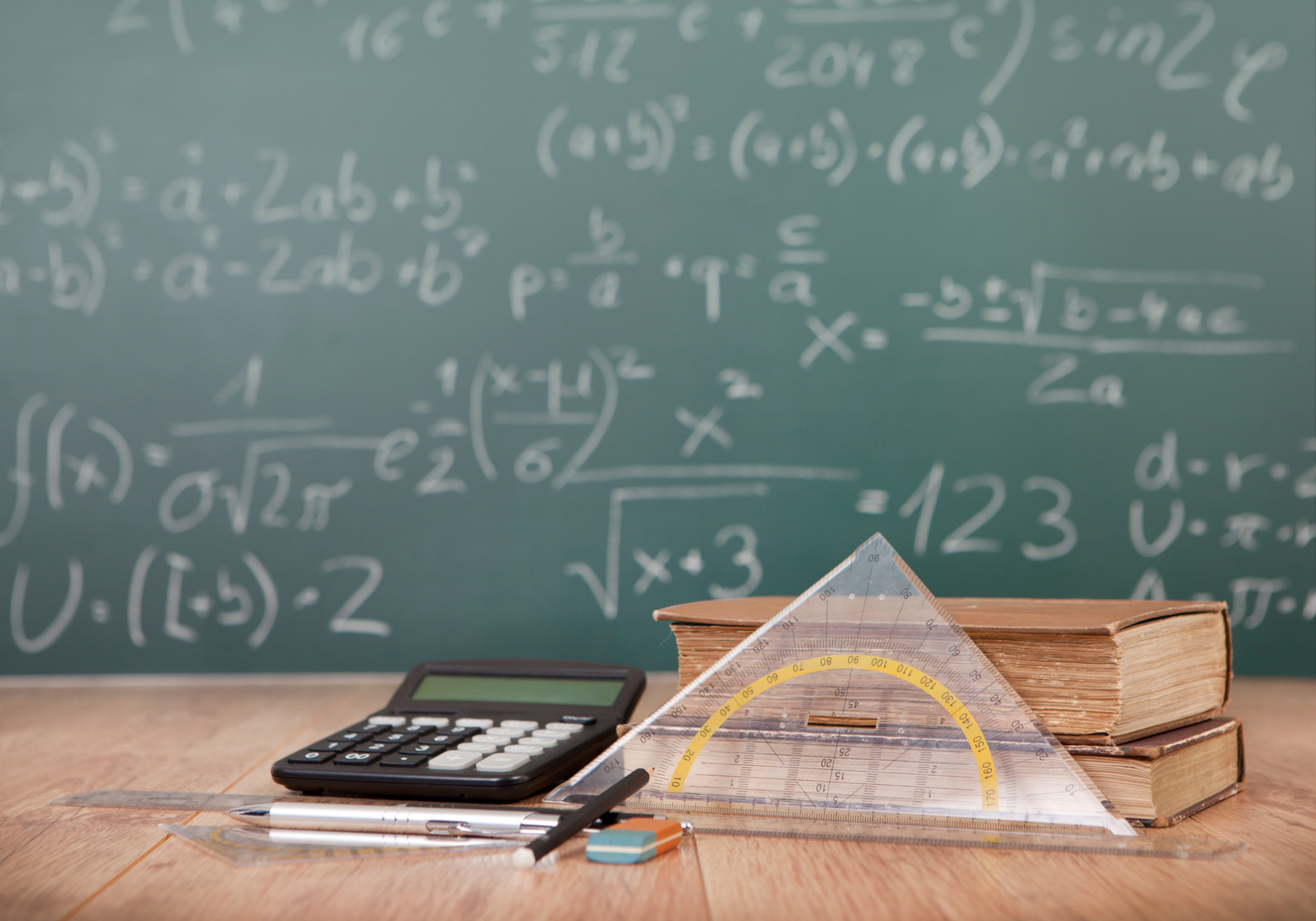




MATEMATIKA

Ivana Beljo | Luca Olivari

2024

Matematika

Ivana Beljo, Luca Olivari

Veleučilište u Šibeniku, 2024.

Naslov izdanja: Matematika
Autori: Ivana Beljo i Luca Olivari
Izdavač: Veleučilište u Šibeniku
Za izdavača: dr.sc.Ljubo Runjić, prof.struč.stud.
Recenzent: prof.dr.sc. Nikola Koceić-Bilan, dr.sc. Ana Perišić, prof.struč.stud.
ISBN: XXX

Adresa izdavača:
Veleučilište u Šibeniku
Trg Andrije Hebranga 11, 22000 Šibenik
Tel: 022/311 060

Predgovor

Ovaj udžbenik nastao je nakon dugogodišnjeg rada na kolegiju Matematika sa studentima Veleučilišta u Šibeniku stručnih prijediplomskih studija iz područja tehničkih znanosti.

Tekst udžbenika namijenjen je upravo studentima stručnih prijediplomskih studija Veleučilišta u Šibeniku, odnosno budućim prvostupnicima inženjerima. Stoga je veći naglasak stavljen na primjere nego same stroge formalne matematičke teorije. Naime, teorijski uvod u svakom poglavlju napravljen sažeto, a upotrijebljen je matematički jezik primjereniji studentima stručnih studija.

Udžbenik se sastoji od 5 poglavlja. U prvom poglavlju opisane su osnove pojma skupa, operacija nad skupovima, te svojstva skupova brojeva. Drugo poglavlje odnosi se na matrice, determinante matrice, inverz matrice te sustave linearnih jednadžbi. U trećem poglavlju obrađen je klasični vektorski račun. Četvrto poglavlje donosi osnovne elemente matematičke analize i diferencijalnog računa realne funkcije realne varijable. U petom poglavlju prikazan je pojam i osnovna svojstva neodređenog, odnosno određenog integrala, metode integriranja ali i primjena određenog integrala u geometriji i mehanici. Svako poglavlje je popraćeno s više riješenih primjera. Na kraju svakog poglavlja dani su zadaci za vježbu s rješenjima.

Osobitu zahvalnost dugujemo recenzentima dr.sc. Ani Perišić i prof.dr.sc. Nikoli Koceić-Bilanu na suradnji te brojnim korisnim savjetima kao i primjedbama i prijedlozima koji su značajno pridonijeli pri pisanju ovog udžbenika. Također, zahvaljujemo kolegi Luki Olivariu pri pomoći u odabiru zadataka kod primjene integrala u mehanici.

Unaprijed se ispričavamo i zahvaljujemo svim čitateljima na ukazanim greškama, nepreciznostima, primjedbama kako bi se sadržaj ovog udžbenika poboljšao pri izradi novog izdanja.

Autorice

Sadržaj

1	Skupovi	1
1.1	Pojam skupa	1
1.2	Zadavanje skupova	2
1.3	Odnosi među skupovima	3
1.3.1	Podskup i nadskup	3
1.3.2	Jednakost skupova	4
1.4	Komplement skupa	4
1.5	Operacije na skupovima	6
1.5.1	Unija skupova	6
1.5.2	Presjek skupova	7
1.5.3	Razlika skupova	8
1.5.4	Svojstva operacija na skupovima	9
1.6	Kartezijev produkt skupova	10
1.7	Skupovi brojeva	10
1.7.1	Prirodni brojevi	11
1.7.2	Cijeli brojevi	11
1.7.3	Racionalni brojevi	12
1.7.4	Realni brojevi	13
1.7.5	Kompleksni brojevi	22
1.8	Zadaci za vježbu	28
2	Matrice	33
2.1	Osnovni pojmovi	33
2.2	Operacije s matricama	35
2.2.1	Transponiranje matrica	35
2.2.2	Zbrajanje i oduzimanje matrica	37
2.2.3	Množenje matrica skalarom	38
2.2.4	Množenje matrica	39
2.3	Determinanta matrice	42
2.4	Inverz matrice	46
2.5	Matrične jednačbe	51

2.6	Sustavi linearnih jednadžbi	53
2.6.1	Cramerova metoda	54
2.6.2	Gauss-Jordanove metode eliminacije	56
2.7	Zadaci za vježbu	60
3	Vektori	75
3.1	Osnovni pojmovi	75
3.2	Operacije s vektorima	77
3.2.1	Zbrajanje vektora	77
3.2.2	Množenje vektora skalarom	79
3.3	Kolinearni i komplanarni vektori. Linearna zavisnost vektora .	81
3.4	Vektori u koordinatnom sustavu	82
3.5	Skalarni produkt vektora	85
3.6	Vektorski produkt vektora	88
3.7	Mješoviti produkt vektora	93
3.8	Zadaci za vježbu	97
4	Funkcije	101
4.1	Pojam funkcije	101
4.1.1	Definicija funkcije	101
4.1.2	Jednakost funkcija, restrikcija funkcije, nultočke funkcije	102
4.1.3	Surjekcija, injekcija i bijekcija	104
4.1.4	Operacije s funkcijama	107
4.2	Svojstva funkcije	107
4.2.1	Monotonost funkcije	107
4.2.2	Ekstremi funkcije	109
4.2.3	Omeđenost funkcije	110
4.2.4	Parnost funkcije	111
4.2.5	Konveksnost i konkavnost funkcije	113
4.3	Kompozicija funkcija	114
4.4	Inverz funkcije	116
4.5	Elementarne funkcije	117
4.5.1	Algebarske funkcije	117
4.5.2	Transcedentne funkcije	124
4.6	Prirodno područje definicije funkcije	131
4.7	Limes funkcije	134
4.7.1	Limes funkcije u točki	134
4.7.2	Limes funkcije u beskonačnosti	139
4.8	Asimptote funkcije	142
4.8.1	Horizontalna asimptota	142
4.8.2	Vertikalna asimptota	144

4.8.3	Kosa asimptota	145
4.9	Derivacija funkcije	147
4.9.1	Definicija derivacije funkcije	148
4.9.2	Tablica derivacija	149
4.9.3	Pravila deriviranja	149
4.9.4	Derivacije višeg reda	154
4.9.5	Primjena derivacije	155
4.10	Skiciranje grafa funkcije	158
4.11	Zadaci za vježbu	168
5	Integrali	179
5.1	Neodređeni integrali	179
5.1.1	Pojam i osnovna svojstva neodređenog integrala	179
5.1.2	Metode integriranja	182
5.2	Određeni integrali	213
5.2.1	Pojam i osnovna svojstva određenog integrala	213
5.2.2	Računanje određenog integrala	215
5.3	Primjena određenog integrala	223
5.3.1	Primjena određenog integrala u geometriji	223
5.3.2	Primjena određenog integrala u mehanici	233
5.4	Zadaci za vježbu	237

Poglavlje 1

Skupovi

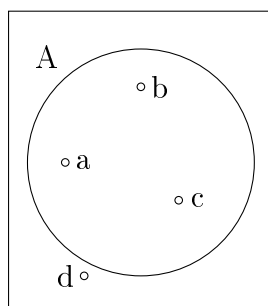
1.1 Pojam skupa

Intuitivno je jasno što se podrazumijeva pod pojmom skup. To je svaka kolekcija objekata, bilo nabrojenih pojedinačno, bilo karakteriziranih nekim zajedničkim svojstvom. Pojam skupa je toliko jednostavan, da ga nije moguće definirati, tj. opisati uz pomoć još jednostavnijih pojmova. Prema tome, skup se smatra osnovnim, nedefiniranim pojmom u matematici.

Skupovi se obično označavaju velikim slovima: $A, B, C \dots X, Y, Z$. Objekti koji tvore dani skup nazivaju se **elementima** toga skupa ili njegovim **članovima**. Elementi skupova označavaju se malim slovima: $a, b, c, \dots, x, y, z$. Činjenica da neki objekt x pripada skupu X zapisuje se $x \in X$ i čita se "x je element skupa X". Zapis $x \notin X$ označava da objekt x ne pripada skupu X . Skup koji nema niti jedan element zove se **prazan skup** i označava simbolom $\emptyset$.

Skupovi se obično vizualiziraju **Vennovim dijagramima**.

Primjer 1.1.1. Prikaz skupa $A = \{a, b, c\}$ Vennovim dijagramom.



Skup A ima tri elementa, d nije element skupa A . Broj elemenata skupa

naziva se **kardinalnim brojem skupa**, te označava $\text{card}(A)$. U ovom primjeru $\text{card}(A) = 3$.

Napomena 1.1.1. Kardinalni broj praznog skupa je 0, $\text{card}(\emptyset) = 0$.

1.2 Zadavanje skupova

Skup se može zadati nabranjem njegovih članova. U tom slučaju koriste se vitičaste zagrade između kojih se nabrajaju svi elementi skupa. Naprimjer $A = \{a, e, i, o, u\}$. Skupovi se mogu zadati i korištenjem svojstva ili karakteristike koju svi elementi tog skupa zadovoljavaju. U tom slučaju bitno je naglasiti iz kojeg većeg skupa bismo element s određenim svojstvom ili karakteristikom. Naprimjer, neka je skup A skup svih samoglasnika. Tada se može reći da A sadržava sva slova hrvatske abecede koja zadovoljavaju svojstvo da su samoglasnici. Matematički se navedeno može zapisati kao: $A = \{x \text{ je slovo hrvatske abecede} | x \text{ je samoglasnik}\}$. Ovakav zapis se čita: Neka je A skup svih slova x takvih da je x samoglasnik.

Neka je $p(x)$ određeno svojstvo, skup koji sadržava sve elemente x iz nekog početnog skupa X koji zadovoljavaju svojstvo $p(x)$ zapisuje se:

$$A = \{x \in X | p(x)\}$$

i čita se " A je skup svih elemenata x koji imaju svojstvo $p(x)$ ".

Skupovi ne moraju imati konačan broj elemenata. Naime, u matematici se često koriste skupovi brojeva koji imaju beskonačno mnogo elemenata. Ukoliko je iz zapisa prvih nekoliko elemenata skupa jasno pravilo po kojem se ponašaju ostali članovi skupa onda se skup ponekad može zadati nabranjem prvih nekoliko elemenata nakon kojih se pišu tri točke: "...".

Primjer 1.2.1. Skup prirodnih brojeva $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ označava se s $\mathbb{N}$.

Zadatak 1.2.1. Napišite sve elemente zadanih skupova:

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} | x - 2 = 3\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{N} | x < 3\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 1\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{N} | x < 1\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{N} | 6 \leq x < 9\}$

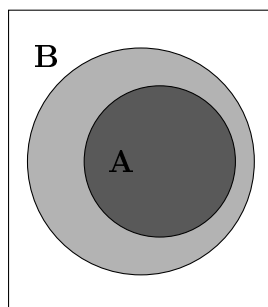
Rješenje:

- (a) $x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow A = \{5\}$
- (b) $x < 3 \Rightarrow x = 1$ ili $x = 2 \Rightarrow B = \{1, 2\}$
- (c) $x \leq 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow C = \{1\}$
- (d) Ne postoji prirodan broj koji je strogo manji od 1. Dakle, $D = \emptyset$.
- (e) $6 \leq x < 9 \Rightarrow x = 6$ ili $x = 7$ ili $x = 8 \Rightarrow E = \{6, 7, 8\}$

1.3 Odnosi među skupovima

1.3.1 Podskup i nadskup

Neka su A i B skupovi. Ako je svaki element iz skupa A ujedno element skupa B onda se kaže da je skup A **podskup** skupa B i označava se $A \subseteq B$. Vennovim dijagramom se prikazuje činjenica da je A podskup od B :



Ako postoji element iz A koji nije element skupa B onda A nije podskup od B i označava se $A \not\subseteq B$.

Skup B **nadskup** skupa A i piše se $B \supseteq A$, ako je A podskup od B . Skup A je **pravi podskup** skupa B ako je $A \subseteq B$ i postoji barem jedan element skupa B koji nije element skupa A . Piše se:

$$A \subset B$$

Zadatak 1.3.1. Neka su zadani skupovi A i B . Odredite je li $A \subseteq B$.

- (a) $A = \{2, 3\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$
- (b) $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$
- (c) $A = \{x \in \mathbb{N} | 4 > x \geq 2\}$ i $B = \{x \in \mathbb{N} | 3 > x \geq 2\}$
- (d) $A = \emptyset$ i $B = \mathbb{N}$

Rješenje:

- (a) $A \subseteq B$ jer je svaki element iz skupa A ujedno i element skupa B .
- (b) $A \not\subseteq B$ jer $2 \in A$ i $2 \notin B$.
- (c) $A = \{2, 3\}$ i $B = \{2\}$. $A \not\subseteq B$ jer $3 \in A$ i $3 \notin B$
- (d) Prazan skup nema niti jedan element, pa je trivijalno ispunjeno da je svaki element iz A ujedno i u B . Dakle, $A \subseteq B$.

Napomena 1.3.1. Prazan skup je podskup svakog svakog skupa.

1.3.2 Jednakost skupova

Za dva skupa A i B kažemo da su **jednaki** ako je svaki element skupa A ujedno element skupa B te svaki element skupa B je ujedno element skupa A .

Napomena 1.3.2. Navedena definicija implicira da ako su dva skupa A i B jednaka, onda je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

Zadatak 1.3.2. Neka su dani skupovi:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1\}$$

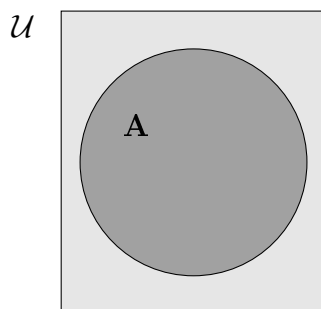
Jesu li skupovi A i B jednaki?

Rješenje:

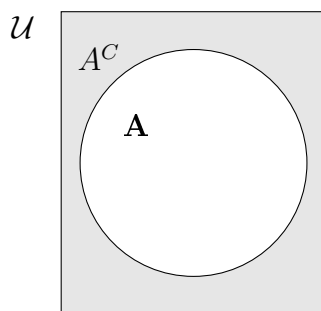
Da, skupovi A i B su jednaki jer je svaki element skupa A ujedno i element skupa B te obratno svaki element skupa B je ujedno i element skupa A .

1.4 Komplement skupa

U razmatranjima skupova često je praktično sve skupove koji se promatraju smijesiti u jedan veliki skup. Time skupovi koji se razmatraju postaju podskupovi tog velikog skupa. Taj veliki skup označava se s $\mathcal{U}$ i zove se **univerzalni skup**. Univerzalnost skupa $\mathcal{U}$ je relativna, te će njegova konkretna definicija varirati od problema do problema. Kod crtanja Vennovih dijagrama univerzalni skup $\mathcal{U}$ se najčešće prikazuje kao pravokutnik u koji se smještaju ostali skupovi.



Neka je $A \subseteq \mathcal{U}$ i $A \neq \mathcal{U}$. Svi elementi skupa $\mathcal{U}$ koji nisu u skupu A tvore skup koji se zove **komplement** skupa A i označava se A^C . Matematički, $A^C = \{x \in \mathcal{U} | x \notin A\}$.



Zadatak 1.4.1. Neka su zadani skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, te univerzalni skup $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 10\}$. Odredite A^C i B^C .

Rješenje:

$A^C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $B^C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

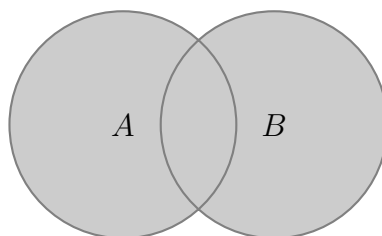
1.5 Operacije na skupovima

U ovom potpoglavlju definirati će se operacije poput unije, presjeka te razlike pomoću kojih se od postojećih skupova mogu formirati novi skupovi.

1.5.1 Unija skupova

Neka su zadani skupovi A i B te univerzalni skup $\mathcal{U}$. **Unija skupova** A i B u oznaci $A \cup B$ je skup svih elemenata koji pripadaju barem jednom od skupova A ili B .

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} | x \in A \text{ ili } x \in B\}$$



Iz definicije unije slijedi $A \subseteq A \cup B$ i $B \subseteq A \cup B$.

Zadatak 1.5.1. Neka su zadani skupovi A i B . Odredite $A \cup B$.

- (a) $A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$
- (b) $A = \emptyset$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (c) $A = \mathbb{N}$ i $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
- (d) $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x < 4\}$

Rješenje:

- (a) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$
- (b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} = B$.
- (c) $A \cup B = \mathbb{N} = A$.
- (d) $B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3\} = A = B$.

Napomena 1.5.1. Za svaki skup A vrijedi:

$$A \cup \emptyset = A$$

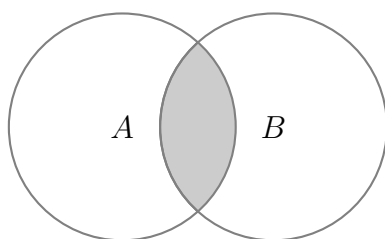
$$A \cup A = A$$

Ako je $B \subseteq A$, onda je $A \cup B = A$.

1.5.2 Presjek skupova

Neka su zadani skupovi A i B te univerzalni skup $\mathcal{U}$. **Presjek** skupova A i B , u oznaci $A \cap B$ je skup svih elemenata koji se nalaze istovremeno i u skupu A i u skupu B .

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} | x \in A \text{ i } x \in B\}$$



Iz definicije presjeka slijedi $A \cap B \subseteq A$ i $A \cap B \subseteq B$.

Zadatak 1.5.2. Neka su zadani skupovi A i B . Odredite $A \cap B$.

- (a) $A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$
- (b) $A = \emptyset$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (c) $A = \mathbb{N}$ i $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
- (d) $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x < 4\}$

Rješenje:

- (a) $A \cap B = \{4, 6\}$
- (b) $A \cap B = \emptyset$.
- (c) $A \cap B = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = B$.
- (d) $B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow A \cap B = \{1, 2, 3\} = A = B$.

Napomena 1.5.2. Za svaki skup A vrijedi:

$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cap A &= A \end{aligned}$$

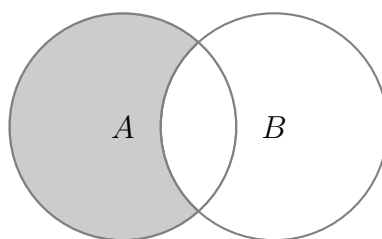
Ako je $B \subseteq A$, onda je $A \cap B = B$.

Ako su A i B neprazni skupovi koji nemaju zajedničkih elemenata, to jest $A \cap B = \emptyset$, onda su A i B **disjunkt**ni skupovi.

1.5.3 Razlika skupova

Neka su zadani skupovi A i B . **Razlika** skupova A i B , u oznaci $A \setminus B$ ("A bez B") je skup svih elemenata koji se nalaze u skupu A , ali ne nalaze u skupu B .

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$



Iz definicije razlike slijedi $A \setminus B \subseteq A$. Općenito vrijedi $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Zadatak 1.5.3. Neka su zadani skupovi A i B . Odredite $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

- (a) $A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$
- (b) $A = \emptyset$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (c) $A = \mathbb{N}$ i $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
- (d) $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 4\}$

Rješenje:

- (a) $A \setminus B = \{2\}$, $B \setminus A = \{5\}$
- (b) $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = B$. Općenito ako je $A = \emptyset$, onda je $B \setminus A = B$, za svaki skup B .
- (c) $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $B \setminus A = \emptyset$. Općenito ako je $B \subseteq A$, onda je $B \setminus A = \emptyset$.
- (d) $B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$.

Napomena 1.5.3. Za svaki skup A vrijedi:

$$\begin{aligned} A \setminus \emptyset &= A \\ A \setminus A &= \emptyset \end{aligned}$$

Ako je $B \subseteq A$, onda je $B \setminus A = \emptyset$.

1.5.4 Svojstva operacija na skupovima

Za skupove A, B i C vrijede slijedeća svojstva:

(i) Komutativnost

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

(ii) Asocijativnost

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(iii) Idempotentnost

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

(iv) Distributivnost

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(v) Involutivnost

$$(A^C)^C = A$$

(vi) De Morganove formule

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Zadatak 1.5.4. Dokažite da vrijedi:

$$(A^C \cup B^C)^C = A \cap B$$

Rješenje:

Koristeći De Morganove formule na skupovima A^C i B^C vrijedi:

$$(A^C \cup B^C)^C = (A^C)^C \cap (B^C)^C$$

Zbog svojstva involutivnosti vrijedi

$$(A^C)^C = A$$

$$(B^C)^C = B$$

Iz toga slijedi:

$$(A^C \cup B^C)^C = A^{CC} \cap B^{CC} = A \cap B$$

.

1.6 Kartezijev produkt skupova

Neka su skupovi A i B neprazni skupovi te $a \in A$ i $b \in B$ elementi skupova A i B . **Uređeni par** (a, b) je skup u kojemu je element a na prvom mjestu, a element b na drugom mjestu. Skup $(a, b) \neq \{a, b\}$ jer u skupu $\{a, b\}$ poredak elemenata a i b nije bitan. Element a se još naziva i prva koordinata, a element b druga koordinata skupa (a, b) .

Vrijedi $(a, b) = (c, d)$ ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

Kartezijev produkt skupova A i B u oznaci $A \times B$ je skup svih uređenih parova (a, b) gdje je $a \in A$ i $b \in B$.

Primjer 1.6.1. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$. Tada je $A \times B$ i $B \times A$:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\} \\ B \times A &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \end{aligned}$$

Za konačne skupove A i B vrijedi da je $\text{card}(A \times B) = \text{card}(B \times A) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B)$.

Napomena 1.6.1. Kartezijev produkt skupova nije komutativan:

$$A \times B \neq B \times A$$

Kartezijev produkt će biti komutativan jedino ako je $A = B$ i tada govorimo o **Kartezijevom kvadratu** $A^2 = A \times A$. To je skup uređenih parova (a, b) gdje su i a i b elementi skupa A .

Zadatak 1.6.1. Za skup $A = \{a, b\}$ odredite Kartezijev kvadrat skupa A .
Rješenje:

$$A^2 = A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

Za Kartezijev kvadrat definira se njegova dijagonala:

$$D = \{(a, b) \in A \times A \mid a = b\} = \{(a, a) \in A \times A\}$$

Zadatak 1.6.2. Odredite dijagonalu gore navedenog Kartezijevog kvadrata.
Rješenje:

$$D = \{(a, a), (b, b)\}$$

1.7 Skupovi brojeva

Skupovi koji se najčešće u matematici promatraju su skupovi brojeva. U ovom poglavlju definirat će se često korišteni skupovi brojeva te će se opisati neka svojstva tih skupova.

1.7.1 Prirodni brojevi

Brojevi $1, 2, 3, 4, \dots$ zovu se prirodni brojevi. **Skup svih prirodnih brojeva** označava se s $\mathbb{N}$. Skup prirodnih brojeva ima svojstva:

1. Postoji najmanji prirodan broj $1 \in \mathbb{N}$.
2. Ne postoji najveći prirodan broj. Za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}$ je prirodan broj koji je strogo veći od n .

U skupu prirodnih brojeva dobro su definirane operacije zbrajanja i množenja, to jest vrijedi ako su $m, n \in \mathbb{N}$ prirodni brojevi onda su i $m+n$ i $m \cdot n$ također prirodni brojevi.

Broj 0 nije element skupa prirodnih brojeva, no ukoliko se skup prirodnih brojeva proširi s nulom, dolazi se do skupa:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Ako su $m, n \in \mathbb{N}$ onda jednačba

$$m + x = n$$

ima rješenje $x = n - m$ u skupu $\mathbb{N}$ samo ako je $n > m$. Dakle, u skupu prirodnih brojeva oduzimanje nije dobro definirano.

1.7.2 Cijeli brojevi

Ako se skupu $\mathbb{N}_0$ pridodaju negativni brojevi $\{-1, -2, -3, \dots\}$ dobije se **skup cijelih brojeva** $\mathbb{Z}$. Dakle,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Skup $\mathbb{Z}$ nema ni najmanji ni najveći element. Svaka jednačba

$$m + x = n$$

gdje su $m, n \in \mathbb{Z}$ ima rješenje u skupu $\mathbb{Z}$, to jest u ovom skupu dobro je definirana operacija oduzimanja.

Ako su $m, n \in \mathbb{Z}$ onda jednačba

$$m \cdot x = n$$

ima rješenje $x = n : m$ u skupu $\mathbb{Z}$ samo ako je n djeljivo s m . Dakle, operacija dijeljenja nije dobro definirana u skupu $\mathbb{Z}$.

1.7.3 Racionalni brojevi

Da bi operacija dijeljenja bila dobro definirana, skup $\mathbb{Z}$ se treba proširiti razlomcima, odnosno racionalnim brojevima. **Skup svih racionalnih brojeva** označavamo s $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Skup racionalnih brojeva ima svojstva:

1. Zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje su dobro definirane operacije u skupu $\mathbb{Q}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad + bc}{bd} \\ \frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{ad - bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \\ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \end{aligned}$$

2. Skup $\mathbb{Q}$ je uređen, to jest svaka dva elementa možemo usporediti po veličini. Za dva racionalna broja vrijedi:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ ili } \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ ili } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ su jednaka ako i samo ako je $a \cdot d = b \cdot c$.

3. Skup $\mathbb{Q}$ nema ni najveći ni najmanji element.
4. Skup $\mathbb{Q}$ je gust. To znači da između svaka dva racionalna broja $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, gdje je $q_1 < q_2$, uvijek postoji treći racionalni broj $q \in \mathbb{Q}$, takav da je $q_1 < q < q_2$.

Svaka linearna jednadžba rješiva je u skupu racionalnih brojeva. Međutim, jednadžba

$$x^2 = a,$$

gdje je $a \in \mathbb{Q}$, nema uvijek rješenje u skupu racionalnih brojeva. Primjerice, jednadžba

$$x^2 = 2$$

nema rješenje u skupu racionalnih brojeva.

Primjer 1.7.1. Dokažite da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Pretpostavimo suprotno, da je $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Ukoliko nas ova pretpostavka dovede do kontradikcije, dokazat ćemo da je pretpostavka bila laž. Ako je $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, onda postoje $m, n \in \mathbb{Q}$ takvi da je $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Izaberimo m i n takve da m i n nemaju zajedničkih djelitelja, to jest neka je razlomak $\frac{m}{n}$ u potpunosti "skraćen". Kvadrirajmo jednadžbu $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

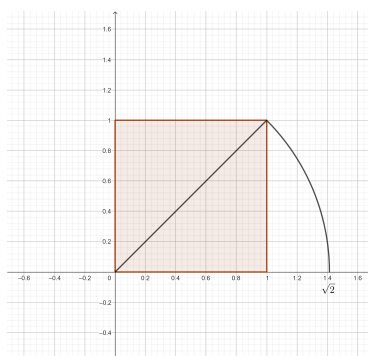
$$\sqrt{2}^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 2n^2 = m^2$$

Kako je $2n^2$ paran broj, to je m^2 također paran broj. m^2 može biti paran broj samo ako je m paran broj. Dakle postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k$. Odavde slijedi da je:

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$$

Odavde slijedi da je n^2 paran broj, pa je i n paran broj. Dakle i m i n su djeljivi s 2. Međutim, ovo je u kontradikciji s činjenicom da smo m i n izabrali takve da nemaju zajedničkih djelitelja. Dakle, došli smo do kontradikcije što znači da pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj nije bila točna.

Skup racionalnih brojeva može se prikazati na pravcu. Iako je skup $\mathbb{Q}$ gust, prethodni primjer pokazuje da postoje brojevi na pravcu koji se ne nalaze u skupu racionalnih brojeva.



1.7.4 Realni brojevi

Brojevi koji leže na brojevnom pravcu, a ne mogu se zapisati kao razlomak zovu se iracionalnim brojevima (Npr. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \dots$). Racionalni i iracionalni brojevi u uniji daju **skup realnih brojeva**. Skup realnih brojeva označava se $\mathbb{R}$.

U skupu realnih brojeva jednadžba

$$x^2 = a$$

ima rješenje ako je a pozitivan realan broj. Skup $\mathbb{R}$ nasljeđuje sva svojstva prethodno napisana za skup $\mathbb{Q}$.

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Definira se otvoreni interval $\langle a, b \rangle$, zatvoreni interval $[a, b]$ te poluotvoreni, odnosno poluzatvoreni interval:

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

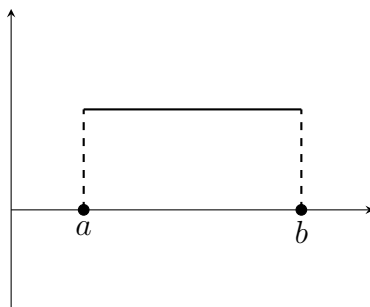
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

$$\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

Napomena 1.7.1. Svaki interval ima beskonačno mnogo elemenata, jer između svaka dva različita realna broja postoji beskonačno mnogo realnih brojeva.

Prikaz intervala na brojevnom pravcu:



Beskonačni intervali su:

$$\langle a, +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$

$$\langle -\infty, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$

$$\langle -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$$

Zadatak 1.7.1. Napišite sljedeće skupove kao intervale.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x + 1 > 0\}$

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} | x - 4 \geq 0\}$

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4 \geq 0\}$

Rješenje:

- (a) $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow A = \langle -1, +\infty \rangle$
- (b) $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow A = [4, +\infty \rangle$
- (c) Kvadratnim funkcijama detaljnije se bavimo u poglavlju 4.5 Elementarne funkcije. Prvi korak u rješavanju nejednadžbe $x^2 - 4 \geq 0$ je nalaženje nultočka, odnosno rješavanje jednadžbe $x^2 - 4 = 0$. Nultočke se mogu naći na dva načina:

- **Koristeći formulu za nultočke kvadratne jednadžbe:**

Ako je zadana kvadratna jednadžba u obliku $ax^2 + bx + c = 0$, onda se realna rješenja te jednadžbe, ukoliko postoje, mogu naći pomoću formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

U zadatku je $a = 1, b = 0$ i $c = -4$, pa je

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \pm 2$$

Osnovni teorem algebre kaže da se kvadratna funkcija $ax^2 + bx + c$ može faktorizirati na način $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, pa vrijedi

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

- **Koristeći formulu razlike kvadrata:**

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ x^2 - 4 &= x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

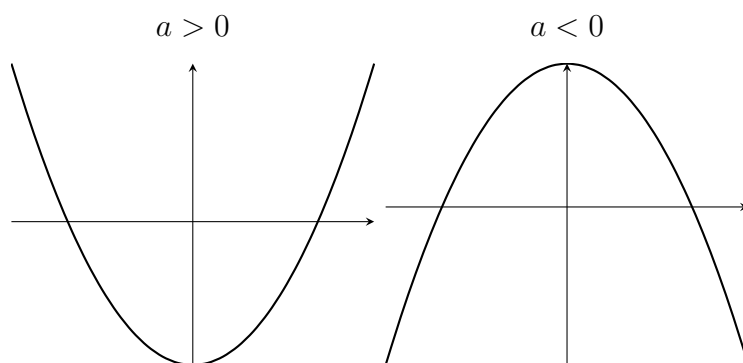
Kako je umnožak dvaju faktora jednak nuli ako i samo ako je barem jedan od faktora jednak nuli, iz gornje jednadžbe slijedi:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

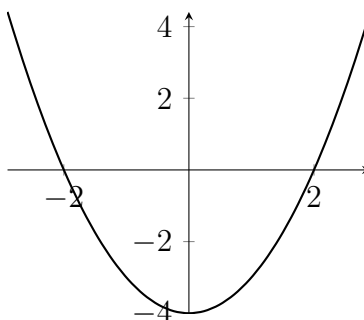
Nakon izračuna nultočki i faktorizacije kvadratne jednadžbe, početna nejednadžba može se riješiti na dva načina:

- **Skiciranjem parabole $x^2 - 4$:**

Za skiciranje parabole dovoljno je znati nultočke, te "oblik" parabole. Oblik parabole $ax^2 + bx + c$ ovisi o vodećem koeficijentu a . Ukoliko je $a > 0$ onda je parabola otvorena prema gore. Ukoliko je $a < 0$ onda je parabola otvorena prema dolje.



U slučaju $x^2 - 4$ vodeći koeficijent je strogo veći od 0, pa je graf funkcije $x^2 - 4$:



Za $x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$ graf funkcije nalazi se iznad osi x , pa je $x^2 - 4 > 0$. Za $x \in \langle -2, 2 \rangle$ graf funkcije nalazi se ispod osi x , pa je $x^2 - 4 < 0$. Dakle, $A = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$.

• **Pomoću tablice:**

Ukoliko su poznati predznaci faktora $x - 2$ i $x + 2$ na nekom intervalu, onda je poznat i predznak funkcije $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Dakle, određivanje intervala na kojem je $x^2 - 4 > 0$ svodi se na određivanje intervala na kojima su $x - 2$ i $x + 2$ veći ili manji od 0. Predznak linearne funkcije je jednostavno odrediti. Ukoliko se radi o rastućoj funkciji (pravcu), predznak je negativan za sve vrijednosti x od $-\infty$ do nultočke i nakon toga pozitivan za sve vrijednosti x do $+\infty$. Ukoliko se radi o padajućoj funkciji (pravcu), predznak je pozitivan za sve vrijednosti x od $-\infty$ do nultočke i nakon toga negativan za sve vrijednosti x do $+\infty$. Informacije o predznacima faktora sumiraju se u tablici.

Tablica ima redaka koliko faktorizacija početne funkcije iz zadatka ima faktora. U slučaju $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$ tablica će imati dva retka. Tablica ima jedan stupac više nego faktora u faktorizaciji početne funkcije. U slučaju $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 =$

$(x-2)(x+2)$ tablica će imati tri stupca. Na okomite linije u tablici se upisuju $-\infty, +\infty$, te nultočke faktora u rastućem poretku.

Redci tablice ispunjavaju se s "+" i "-" na sljedeći način: Ukoliko je koeficijent koji množi x u faktoru pozitivan, tablica se ispunjava s "-" od $-\infty$ do nultočke i nakon toga s "+" do $+\infty$. Ukoliko je koeficijent koji množi x u faktoru negativan, tablica se ispunjava s "+" od $-\infty$ do nultočke i nakon toga s "-" do $+\infty$.

Množenjem predznaka po stupcima dobije se predznak početne funkcije na intervalima.

	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$		-	-	+
$x+2$		-	+	+
$x^2 - 4$		+	-	+

Za $x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$ vrijedi $x^2 - 4 > 0$. Za $x \in \langle -2, 2 \rangle$ $x^2 - 4 < 0$. Dakle, $A = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$. Rubne točke -2 i 2 su isključene jer tražimo rješenja stroge nejednakosti $x^2 - 4 > 0$, a za $x = \pm 2$ je $x^2 - 4 = 0$.

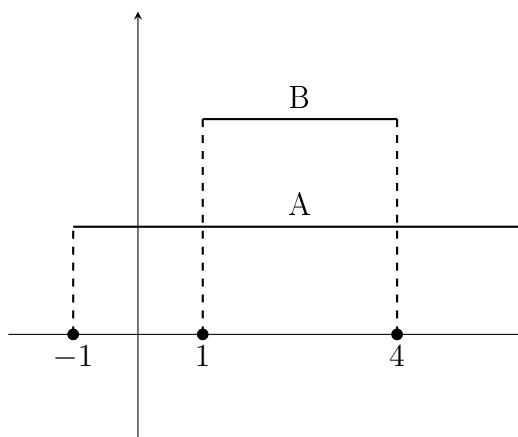
Zadatak 1.7.2. Neka su zadani skupovi A i B . Odredite $A \cap B$ i $A \cup B$.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x > -1\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 4\}$

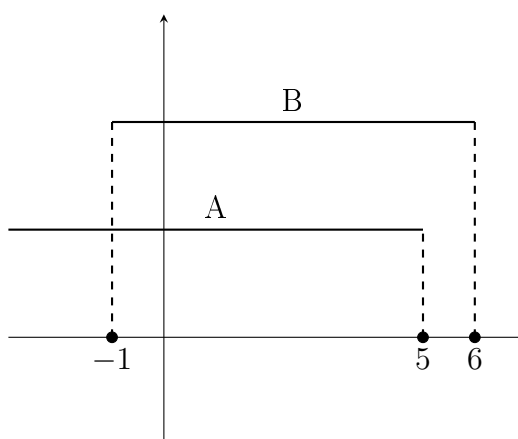
(b) $A = \{x \in \mathbb{R} | x < 5\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leq 6\}$

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x < 5\}$. i $B = \{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x \leq 4\}$

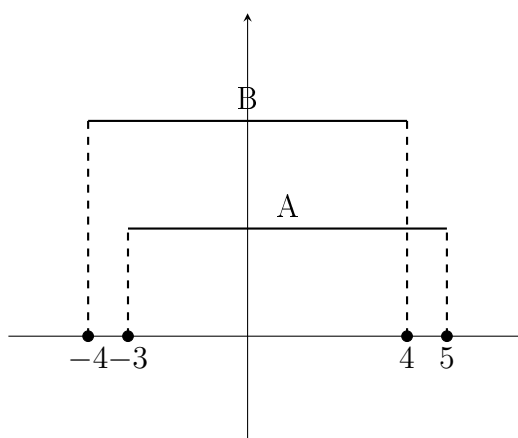
(a) $A = \langle -1, +\infty \rangle, B = [1, 4] \Rightarrow A \cup B = A = \langle -1, +\infty \rangle, A \cap B = B = [1, 4]$



(b) $A = \langle -\infty, 5 \rangle, B = \langle -1, 6 \rangle \Rightarrow A \cup B = \langle -\infty, 6 \rangle, A \cap B = \langle -1, 5 \rangle$



(c) $A = [-3, 5 \rangle, B = [-4, 4] \Rightarrow A \cup B = [-4, 5 \rangle, A \cap B = [-3, 4]$



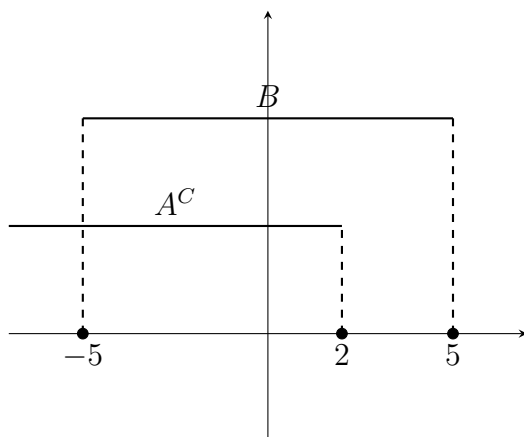
Zadatak 1.7.3. Neka su zadani skupovi A i B , te univerzalni skup $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. Odredite A^C i $A \setminus B$.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} | 2 - x < 0\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} | -5 \leq x \leq 5\}$

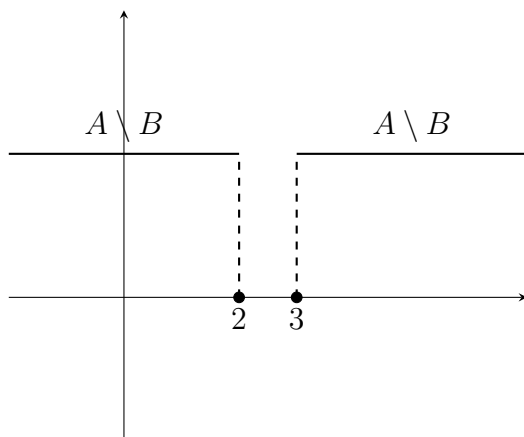
(b) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x + 1 \geq 0\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x \leq 3\}$

Rješenje:

(a) $A = \langle 2, +\infty \rangle, B = [-5, 5] \Rightarrow A^C = \langle -\infty, 2], A \setminus B = \langle 5, +\infty \rangle$



(b) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$, za svaki realni broj x . Dakle, $A = \mathbb{R}$.
 $B = \langle 2, 3] \Rightarrow A^C = \emptyset, A \setminus B = \langle -\infty, 2] \cup \langle 3, +\infty \rangle$



Zadatak 1.7.4. Dani su skupovi

$$A = \{x \in \mathbb{R} | -x^2 + 10x - 21 > 0\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \left| \frac{(2-x)(x+5)}{x} \leq 0 \right. \right\}.$$

Odredite skupove $A \cap B$ i $B \setminus A$.

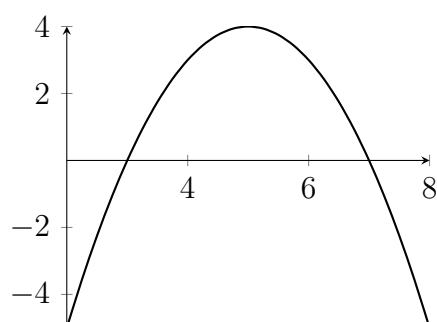
Rješenje:

Za odrađivanje $A \cap B$ i $B \setminus A$ potrebno je zapisati skupove A i B kao intervale.

Skup A

$$-x^2 + 10x - 21 > 0$$

$$x_1 = 3, x_2 = 7$$



$$A = \langle 3, 7 \rangle$$

Skup B

$$\frac{(2-x)(x+5)}{x} \leq 0$$

$$2-x=0 \Rightarrow x=2$$

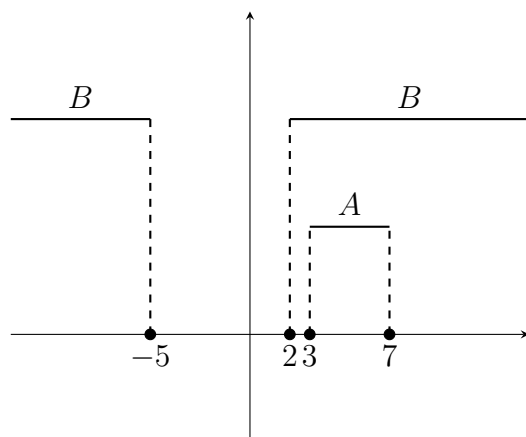
$$x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

$$x=0 \Rightarrow x=0$$

	$-\infty$	-5	0	2	$+\infty$
$2-x$		+	+	+	-
$x+5$		-	+	+	+
x		-	-	+	+
		+	-	+	-

$$B = [-5, 0) \cup [2, +\infty)$$

Za $x = 2$ i $x = 5$ funkcija $\frac{(2-x)(x+5)}{x}$ je jednaka nuli, pa su točke 2 i 5 uključene. Za $x = 0$ funkcija $\frac{(2-x)(x+5)}{x}$ nije definirana jer je 0 nultočka nazivnika, pa je ta točka isključena.



$$A \cap B = \langle 3, 7 \rangle$$

$$B \setminus A = [-5, 0) \cup [2, 3] \cup [7, +\infty)$$

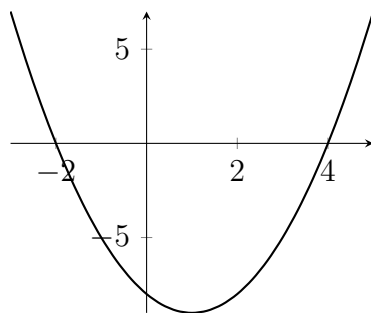
Zadatak 1.7.5. Dani su skupovi $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 8 < 0\}$ i $B = \left\{x \in \mathbb{R} \left| \frac{x+4}{-x(3-x)} \geq 0 \right.\right\}$.
Odredite uniju i presjek skupova A i B .

Rješenje:

Za odrađivanje $A \cap B$ i $A \cup B$ potrebno je zapisati skupove A i B kao intervale.

Skup A

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 4$$



$$A = \langle -2, 4 \rangle$$

Skup B

$$\frac{x+4}{-x(3-x)} \geq 0$$

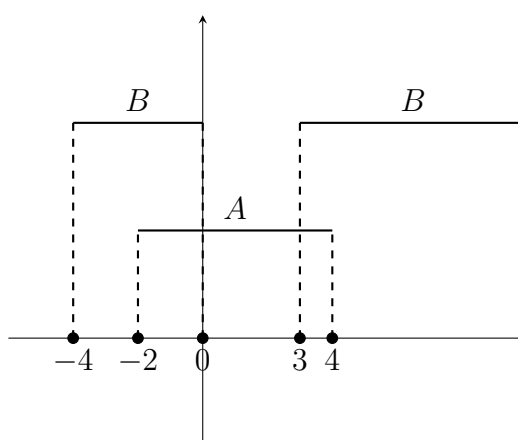
$$x+4=0 \Rightarrow x=-4$$

$$-x=0 \Rightarrow x=0$$

$$3-x=0 \Rightarrow x=3$$

	$-\infty$	-4	0	3	$+\infty$
$x+4$		-	+	+	+
$-x$	+	+	-	-	
$3-x$	+	+	+	-	
	-	+	-	+	

$$B = [-4, 0) \cup \langle 3, +\infty \rangle$$



$$A \cup B = [-4, +\infty)$$

$$A \cap B = \langle -2, 0 \rangle \cup \langle 3, 4 \rangle$$

1.7.5 Kompleksni brojevi

Skup kompleksnih brojeva uvodi se zbog nemogućnosti rješavanja vrlo jednostavnih jednačbi, kao npr. $x^2 + 1 = 0$. Naime, jednačba $x^2 = -1$ u području realnih brojeva nema rješenja jer je kvadrat svakog realnog broja nenegativan broj. Stoga se uvodi jedan novi objekt, označimo ga sa i , kojem se pridružuje svojstvo da pomnožen samim sobom daje -1 .

$$i^2 = -1$$

Za proizvoljne realne brojeve x i y promatra se skup svih brojeva oblika $x + yi$. U tom skupu uvode se operacije zbrajanja i množenja. Neka su $x_1 + y_1i$ i $x_2 + y_2i$ dva proizvoljna elementa tog skupa. Tada je:

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \\ (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i \end{aligned}$$

Skup sa tako definiranim operacijama zbrajanja i množenja nazivamo **skupom kompleksnih brojeva** i označavamo ga sa $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Rješenje gore navedene kvadratne jednadžbe $x^2 + 1 = 0$ je u skupu kompleksnih brojeva i iznosi $x_{1,2} = \pm i$. Jedno od najvažnijih svojstava skupa kompleksnih brojeva je da sve kvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima imaju rješenje u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, te da su i jednadžbe proizvoljnog stupnja, kako s realnim tako i s kompleksnim koeficijentima, uvijek rješive u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Uobičajeno je da se kompleksan broj označava jednim slovom, najčešće sa z , tj.

$$z = x + yi$$

Ovakav oblik kompleksnog broja naziva se **standardni oblik kompleksnog broja**. Pod realnim dijelom kompleksnog broja $z = x + yi$ podrazumijeva se broj x . Simbolički to označavamo sa $Re(z) = x$. Imaginarni dio kompleksnog broja z je y , u oznaci $Im(z) = y$. Kompleksni broj i zove se **imaginarna jedinica**.

Primjer 1.7.2. Ako je kompleksni broj $z = 4 + 5i$ tada je realni dio $Re(z) = 4$ a imaginarni dio kompleksnog broja $Im(z) = 5$.

Kompleksan broj $\bar{z} = x - yi$ naziva se **konjugirano kompleksnim brojem** broja $z = x + yi$.

Primjer 1.7.3. Konjugirano kompleksni broj kompleksnog broja $z = 5 + 4i$ je $\bar{z} = 5 - 4i$.

Napomena 1.7.2. Produkt bilo kojeg kompleksnog broja i njegovog konjugiranog broja je realan broj.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$$

Za potencije imaginarne jedinice vrijedi:

$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ &\vdots \\ i^{4k+r} &= i^r, \text{ gdje je } r \in \{0, 1, 2, 3\}, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Primjer 1.7.4. Izračunajte $i^{203}, i^{321}, i^{86}, i^{-118}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} i^{203} &= i^{200+3} = i^{4 \cdot 50+3} = i^3 = -i \\ i^{321} &= i^{320+1} = i^{4 \cdot 80+1} = i^1 = i \\ i^{86} &= i^{84+2} = i^{4 \cdot 21+2} = i^2 = -1 \\ i^{-118} &= i^{-120+2} = i^{4 \cdot (-30)+2} = i^2 = -1 \end{aligned}$$

Primjer 1.7.5. Za kompleksne brojeve $z_1 = 1 + 2i$ i $z_2 = 2 - 3i$ odredite

$$z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1 + 2i) + (2 - 3i) = 1 + 2i + 2 - 3i = 3 - i \\ z_1 - z_2 &= (1 + 2i) - (2 - 3i) = 1 + 2i - 2 + 3i = -1 + 5i \\ z_1 \cdot z_2 &= (1 + 2i) \cdot (2 - 3i) = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 2 + i + 6 = 8 + i \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1 + 2i}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{2 + 3i + 4i + 6i^2}{2^2 - (3i)^2} = \\ &= \frac{2 + 7i + 6 \cdot (-1)}{4 - 9i^2} = \frac{-4 + 7i}{4 + 9} = \frac{-4 + 7i}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i \end{aligned}$$

Primjer 1.7.6. Prikažite kompleksan broj $\frac{3 - 2i}{1 + i}$ u standardnom obliku.

Rješenje:

$$\frac{3 - 2i}{1 + i} = \frac{3 - 2i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{3 - 2i - 3i + 2i^2}{1 - i^2} = \frac{3 - 5i - 2}{1 + 1} = \frac{1 - 5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + yi$ je realan broj

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1i$ i $z_2 = x_2 + y_2i$ su jednaka ako i samo ako je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Zadatak 1.7.6. Riješite jednadžbu $|z| - z = 1 + 2i$.

Rješenje:

Traženo rješenje označava se sa $z = x + yi$, tada je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nakon uvrštavanja u danu jednadžbu:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} - (x + yi) &= 1 + 2i \\ \sqrt{x^2 + y^2} - x - yi &= 1 + 2i\end{aligned}$$

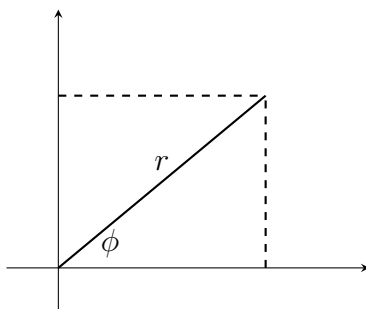
Iz jednakosti dva kompleksna broja slijedi

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \quad -y = 2 \implies y = -2$$

Uvrštavanjem $y = -2$ u jednadžbu $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 1$ dobije se

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + (-2)^2} - x &= 1 \implies \sqrt{x^2 + 4} = 1 + x \\ x^2 + 4 &= 1 + 2x + x^2 \implies 4 - 1 = 2x \implies 2x = 3 \implies x = \frac{3}{2} \\ &\implies z = \frac{3}{2} - 2i.\end{aligned}$$

Svakom kompleksnom broju $z = x + yi$ jednoznačno je pridružena točka $T(x, y)$ kompleksne ravnine i obratno. Položaj točke može biti određen udaljenošću r od ishodišta i kutom ϕ što ga spojnica ishodišta i točke zatvara s pozitivnim smjerom realne osi (osi x). Kut ϕ nazivamo **argumentom kompleksnog broja** $z \neq 0$, $\phi = \arg(z)$. Za kompleksni broj $z \neq 0$ argument od z , ϕ nije jednoznačno određen. Ako je ϕ neki argument kompleksnog broja z tada su i kutovi $\phi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ također argumenti broja z .



Napomena 1.7.3. Kompleksni broj z i njegov konjugirano kompleksni broj $\bar{z}$ su simetrični s obzirom na os x .

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \\ \tan \phi &= \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Realni i imaginarni dio kompleksnog broja ($Re(z) = x$ i $Im(z) = y$) moguće je izraziti pomoću veličina r i ϕ .

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \\y &= r \sin \phi\end{aligned}$$

prema tome se kompleksni broj $z = x + yi$ može prikazati u **trigonometrijskom obliku**

$$z = r \cos \phi + r \sin \phi \cdot i = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

Napomena 1.7.4. Dva kompleksna broja $z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$ su jednaka ako i samo ako je $r_1 = r_2$ i $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Primjer 1.7.7. Kompleksni broj $z = 1 + i$ prikažite u trigonometrijskom obliku:

Rješenje:

Iz standardnog oblika kompleksnog broja vrijedi:

$$x = 1, y = 1$$

Prema formuli:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1 > 0 &\implies \phi \text{ je kut u I. ili III. kvadrantu}\end{aligned}$$

Iz predznaka x ili y može se odrediti u kojem je kvadrantu kut ϕ

$$\implies x = r \cos \phi (x > 0 \implies \cos \phi > 0) \text{ ili } y = r \sin \phi (y > 0 \implies \sin \phi > 0)$$

Iz čega proizlazi da se kut ϕ nalazi u I. kvadrantu $\implies \phi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$
Kompleksni broj z sada se može zapisati u trigonometrijskom obliku:

$$z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

Sa kompleksnim brojevima zadanim u trigonometrijskom obliku $z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$ izvode se slijedeće operacije:

- Množenje: kompleksni brojevi se množe tako da se apsolutne vrijednosti pomnože, a argumenti zbroje.

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \cdot r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \cdot (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)]\end{aligned}$$

- Dijeljenje: kompleksni brojevi dijele se tako da se apsolutne vrijednosti podjele, a argumenti oduzmu.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)}{r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)} = \frac{r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)}{r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)} \cdot \frac{\cos \phi_1 - i \sin \phi_1}{\cos \phi_1 - i \sin \phi_1}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2[\cos \phi_1 \cdot \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 + i(\sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2 - \cos \phi_1 \cdot \sin \phi_2)]}{r_1(\cos^2 \phi_1 + \sin^2 \phi_1)}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} [\cos(\phi_2 - \phi_1) + i \sin(\phi_2 - \phi_1)]$$

- Potenciranje: ako je $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ iz definicije množenja slijedi

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i \sin(n\phi))$$

- Korjenovanje:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right)$$

Primjer 1.7.8. Izračunajte $\sqrt{z}$ ako je kompleksni broj $z = 2 + 2i\sqrt{3}$.
Rješenje napišite u standardnom obliku.

Rješenje:

Kompleksni broj z iz standardnog oblika potrebno je pretvoriti u trigonometrijski oblik:

Iz standardnog oblika kompleksnog broja vrijedi: $x = 2, y = 2\sqrt{3}$

Prema formuli: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$\tan \phi = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} > 0 \implies \phi$ je kut u I. ili III. kvadrantu

Iz predznaka x ili y može se odrediti u kojem je kvadrantu kut ϕ

$$\implies x = r \cos \phi (x > 0 \implies \cos \phi > 0) \text{ ili } y = r \sin \phi (y > 0 \implies \sin \phi > 0)$$

Iz čega proizlazi da se kut ϕ nalazi u I. kvadrantu $\implies \phi = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

Trigonometrijski oblik:

$$z = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

Iz formule korjenovanja kompleksnih brojeva trigonometrijskog oblika

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{2} \right)$$

$$\sqrt{z}_{k=0} = \sqrt{4}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$$

$$\sqrt{z}_{k=1} = \sqrt{4} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2} \right) = \sqrt{4}(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})$$

$$\sqrt{z}_{k=1} = 2(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i$$

1.8 Zadaci za vježbu

Zadatak 1.8.1. Odredite skupove $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$ ako je:

- (a) $A = \{2, 7, 10, 15\}$ i $B = \{1, 3, 7, 10, 13, 18\}$.
 (b) $A = \{1, 3, 5, 7, 10, 12, 14\}$ i $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.

Rješenje:

- (a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 10, 13, 15, 18\}$, $A \cap B = \{7, 10\}$,
 $A \setminus B = \{2, 15\}$ i $B \setminus A = \{1, 3, 13, 18\}$.
 (b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14\}$, $A \cap B = \{10, 12, 14\}$,
 $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7\}$ i $B \setminus A = \{2, 4, 6, 8\}$.

Zadatak 1.8.2. Odredite skupove $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^C i B^C ako je:

- (a) $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$, $A = \{3, 7, 10, 12\}$ i $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.
 (b) $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 4, 6\}$ i $B = \{3, 5, 6\}$.

Rješenje:

- (a) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14\}$, $A \cap B = \{10, 12\}$,
 $A \setminus B = \{3, 7\}$, $B \setminus A = \{2, 4, 6, 8, 14\}$,
 $A^C = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 15\}$ i $B^C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$.
 (b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{6\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 4\}$, $B \setminus A = \{3, 5\}$,
 $A^C = \{3, 5, 7, 8, 9, \dots\}$ i $B^C = \{1, 2, 4, 7, 8, \dots\}$.

Zadatak 1.8.3. Zadani su skupovi $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{a, b, e\}$ i $Z = \{a, c\}$. Koje su od navedenih tvrdnji istinite?

- (a) $a \in X$
 (b) $a \in X \cap Y \cap Z$
 (c) $e \notin X$
 (d) $b \in Z$
 (e) $Z \subseteq X$
 (f) $X \supseteq Y$

Rješenje:

- (a) $a \in X$ - istina
- (b) $a \in X \cap Y \cap Z$ - istina
- (c) $e \notin X$ - istina
- (d) $b \in Z$ - laž
- (e) $Z \subseteq X$ - istina
- (f) $X \supseteq Y$ - laž

Zadatak 1.8.4. Odredite $(A \cup B) \setminus C$ ako je:

- (a) $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ i $C = \{3, 4, 6\}$.
- (b) $A = \{3, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ i $C = \emptyset$.
- (c) $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ i $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Rješenje:

- (a) $(A \cup B) \setminus C = (\{1, 2, 4, 5\} \cup \{2, 3, 4\}) \setminus \{3, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{3, 4, 6\} = \{1, 2, 5\}$.
- (b) $(A \cup B) \setminus C = (\{3, 6, 7\} \cup \{2, 3, 4\}) \setminus \emptyset = \{2, 3, 4, 6, 7\} \setminus \emptyset = \{2, 3, 4, 6, 7\}$.
- (c) $(A \cup B) \setminus C = (\{1, 2\} \cup \{3, 4\}) \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\} = \emptyset$.

Zadatak 1.8.5. Napišite sljedeće skupove kao intervale:

- (a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + 2x + 8 \geq 0\}$.
- (b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + 5x \geq 0\}$.
- (c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 3\}$.
- (d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9x + 8 < 0\}$.

Rješenje:

- (a) $A = [-2, 4]$.
- (b) $B = [0, 5]$.
- (c) $C = \langle -3, 3]$.
- (d) $D = \langle 1, 8\rangle$.

Zadatak 1.8.6. Odredite $(A \cap B) \setminus C$ ako je:

- (a) $A = [2, 7], B = \langle -2, 4 \rangle$ i $C = \emptyset$.
- (b) $A = [0, 4], B = \langle 0, 2 \rangle$ i $C = \langle 1, 2 \rangle$.
- (c) $A = \langle 1, 5 \rangle, B = [-2, 4]$ i $C = \langle -2, 2 \rangle$.
- (d) $A = [-3, 6], B = \langle -3, 7 \rangle$ i $C = \langle -2, 1 \rangle$

Rješenje:

- (a) $(A \cap B) \setminus C = ([2, 7] \cap \langle -2, 4 \rangle) \setminus \emptyset = [2, 4] \setminus \emptyset = [2, 4]$.
- (b) $(A \cap B) \setminus C = ([0, 4] \cap \langle 0, 2 \rangle) \setminus \langle 1, 2 \rangle = \langle 0, 2 \rangle \setminus \langle 1, 2 \rangle = \emptyset$.
- (c) $(A \cap B) \setminus C = (\langle 1, 5 \rangle \cap [-2, 4]) \setminus \langle -2, 2 \rangle = \langle 1, 4 \rangle \setminus \langle -2, 2 \rangle = [2, 4]$.
- (d) $(A \cap B) \setminus C = ([-3, 6] \cap \langle -3, 7 \rangle) \setminus \langle -2, 1 \rangle = \langle -3, 6 \rangle \setminus \langle -2, 1 \rangle = \langle -3, -2 \rangle \cup \langle 1, 6 \rangle$.

Zadatak 1.8.7. Dani su skupovi

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + 10x - 24 > 0\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{(3-x)(x+2)}{x-1} \leq 0\right\}$$

Odredite skupove $A \cup B$ i $B \setminus A$.

Rješenje:

$$A = \langle 4, 6 \rangle$$

$$B = [-2, 1) \cup [3, +\infty)$$

$$A \cup B = [-2, 1) \cup [3, +\infty)$$

$$B \setminus A = [-2, 1) \cup [3, 4] \cup [6, +\infty)$$

Zadatak 1.8.8. Dani su skupovi

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 8 < 0\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-x(x+5)}{x-3} \leq 0\right\}$$

Odredite skupove $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

Rješenje:

$$A = \langle -2, 4 \rangle$$

$$B = [-5, 0] \cup (3, +\infty)$$

$$A \setminus B = \langle 0, 3 \rangle$$

$$B \setminus A = [-5, -2] \cup [4, +\infty)$$

Zadatak 1.8.9. Zadan je kompleksan broj $z = 3 + 4i$. Izračunajte:

$$z + z, z - z, z \times z, \frac{z}{z}$$

Rješenje:

$$z + z = 6$$

$$z - z = 8i$$

$$z \times z = 25$$

$$\frac{z}{z} = -\frac{7}{25} + \frac{24}{25}i$$

Zadatak 1.8.10. Pretvorite u trigonometrijski oblik slijedeće kompleksne brojeve:

(a) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

(b) $z = 1 + i\sqrt{3}$

(c) $z = \sqrt{-3} + i$

(d) $z = -\sqrt{3} - i$

Rješenje:

(a) $z = 2(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$

(b) $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

(c) $z = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$

(d) $z = 2(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})$

Poglavlje 2

Matrice

2.1 Osnovni pojmovi

Matrica je pravokutna shema brojeva. Matrica se može zamisliti kao tablica od m redaka i n stupaca. Matrice se označavaju velikim slovima i zapisuju u obliku:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elementi matrice su brojevi i označavaju se s a_{ij} . U ovoj oznaci i označava redak, a j stupac u kojem se nalazi element a_{ij} . Kraći zapis matrice A čiji su elementi a_{ij} je

$$A = [a_{ij}] \in M_m n.$$

Za matrice koje imaju m redaka i n stupaca kaže se da su **tipa** $(m \times n)$.

Primjer 2.1.1. Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ je tipa (2×3) .

Ako matrica ima jednak broj redaka i stupaca kaže se da je matrica **kvadratna**. Za matricu koja ima n redaka i stupaca kaže se da je matrica **reda** n .

Primjer 2.1.2. Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ je kvadratna matrica reda 3.

Neka je matrica A kvadratna matrica reda n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Glavnu dijagonalu matrice A čine elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, a sporednu dijagonalu matrice A čine elementi $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$.

Kvadratna matrica koja na glavnoj dijagonali ima ne-nul elemente, a na ostalim mjestima nule zove se **dijagonalna matrica**. Dakle, ako je A dijagonalna matrica, onda A ima oblik:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Primjer 2.1.3. Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ je dijagonalna matrica reda 3.

Dijagonalna matrica koja na glavnoj dijagonali ima sve brojeve jednake zove se **skalarna matrica**. Dakle, ako je A skalarna matrica, onda A ima oblik:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix}$$

gdje je a realan broj.

Primjer 2.1.4. Matrica $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ je skalarna matrica reda 4.

Jedninična matrica reda n je skalarna matrica reda n koja na glavnoj dijagonali ima sve jedinice. Jedninična matrica označava se velikim slovom I .

Primjer 2.1.5. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ je jedinična matrica reda 3.

Ako su svi elementi matrice jednaki nuli onda se matrica zove **nulmatrica**.

Primjer 2.1.6. Matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ je nulmatrica matrica tipa (2×3) .

Kvadratna matrica je **gornjetrokutasta** ako su joj svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli.

Primjer 2.1.7. Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ je gornjetrokutasta matrica reda 4.

Kvadratna matrica je **donjetrokutasta** ako su joj svi elementi iznad dijagonale jednaki nuli.

Primjer 2.1.8. Matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ je donjetrokutasta matrica reda 3.

Napomena 2.1.1. Dijagonalna matrica je i gornjetrokutasta i donjetrokutasta.

Dvije matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ su **jednake** ($A = B$) ako i samo ako su matrice istog reda te ako su im odgovarajući elementi jednaki, tj. ako za svaki $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ vrijedi:

$$a_{ij} = b_{ij}.$$

2.2 Operacije s matricama

2.2.1 Transponiranje matrica

Neka je A matrica tipa $(m \times n)$. **Transponirana matrica** matrice A , u oznaci A^T , je matrica tipa $(n \times m)$ koja se dobije zamjenom redaka i stupaca matrice A . Dakle, ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onda je

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Primjer 2.2.1. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ matrica reda (2×3) onda je

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \text{ matrica reda } (3 \times 2).$$

Kvadratna matrica kod koje vrijedi da je $A = A^T$ zove se **simetrična matrica**.

Primjer 2.2.2. Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ je simetrična.

Zadatak 2.2.1. Transponirajte sljedeće matrice i napišite kojeg su tipa:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $B = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rješenje:

(a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, matrica A je tipa (3×2) , a matrica A^T je tipa (2×3) .

(b) $B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, matrica B je tipa (1×4) , a matrica B^T je tipa (4×1) .

(c) $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, matrice C i C^T su reda 2.

2.2.2 Zbrajanje i oduzimanje matrica

Matrice se mogu zbrajati i oduzimati samo ako su istog tipa. Rezultat zbrajanja (ili oduzimanja) dviju matrica $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ tipa $(m \times n)$ je matrica $C = [c_{ij}]$ tipa $(m \times n)$ čiji je element na mjestu i, j zbroj (ili razlika) elemenata na mjestu i, j matrica A i B , tj. za svaki $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ vrijedi:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}.$$

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zbrajanje matrica je komutativno i asocijativno, to jest za matrice A, B i C tipa $(m \times n)$ vrijedi:

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Zadatak 2.2.2. Neka su A i B matrice. Ako je moguće, izračunajte $A + B$ i $A - B$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
A + B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2 + (-1) & 1 + 2 & 3 + 0 \\ 0 + 1 & -1 + 0 & -2 + 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
A - B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2 - (-1) & 1 - 2 & 3 - 0 \\ 0 - 1 & -1 - 0 & -2 - 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
A + B &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \\
A - B &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Matrice A i B nisu istog tipa, tako da ih ne možemo zbrajati ni oduzimati, to jest $A + B$ i $A - B$ ne postoje.

2.2.3 Množenje matrica skalarom

Matrica $A = [a_{ij}]$ množi se sa skalarom α , $\alpha \in \mathbb{R}$ na način da se svaki element matrice $A = [a_{ij}]$ pomnoži brojem α , odnosno

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.2.3. Izračunajte αA ako je:

$$(a) \alpha = 3, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(b) \alpha = 0, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

$$(a) \alpha A = 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 21 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(b) \alpha A = 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Za množenje matrica skalarom vrijedi

- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ - kvaziasocijativnost
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ - distributivnost množenja skalarom prema zbrajanju realnih brojeva
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ - distributivnost množenja skalarom prema zbrajanju matrica

Napomena 2.2.1. Primjetite da u jednakosti $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ množenje između $\alpha\beta$ je množenje realnih brojeva, dok je množenje βA i $\alpha(\beta A)$ množenje matrice skalarom.

2.2.4 Množenje matrica

Matrice A i B su **ulančane matrice** ako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B , tj. ako je matrica A tipa $(m \times n)$, a matrica B tipa $(n \times p)$. Ako su matrice A i B ulančane, onda se može definirati njihov umnožak.

Neka je matrica $A = [a_{ij}]$ tipa $(m \times n)$ i $B = [b_{ij}]$ tipa $(n \times p)$. Umnožak matrica A i B je matrica $C = A \cdot B = [c_{ij}]$, tipa $(m \times p)$ za koju vrijedi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Dakle, element matrice $A \cdot B$ koji se nalazi u i -tom retku i u j -tom stupcu dobije se tako da se redom pomnože elementi i -tog retka matrice A i j -tog stupca matrice B te se dobiveni umnošci zbroje.

Zadatak 2.2.4. Izračunajte $A \cdot B$ ako je:

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

- (a) Matrica A je tipa (2×3) i matrica B je tipa (3×2) . Dakle, produkt $A \cdot B$ je moguć. Rezultat će biti matrica reda 2.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- (b) Matrica A je tipa (2×3) i matrica B je tipa (2×3) . Dakle matrice A i B nisu ulančane, pa produkt $A \cdot B$ nije moguć.

Napomena 2.2.2. Relacija "biti ulančan" nije komutativna, to jest, ako su A i B ulančane matrice, to ne znači da su B i A ulančane. Dakle, ako $A \cdot B$ postoji, $B \cdot A$ ne mora postojati. Čak i ako imamo dvije matrice za koje postoji $A \cdot B$ i $B \cdot A$ općenito vrijedi $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Zadatak 2.2.5. Izračunajte $A \cdot B$ i $B \cdot A$ ako je:

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 7 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

- (a) Matrica A je tipa (4×2) i matrica B je tipa (2×2) . Matrice A i B su ulančane, ali matrice B i A nisu ulančane. Produkt $A \cdot B$ je moguć.

Rezultat će biti matrica tipa (4×2) . Produkt $B \cdot A$ nije moguć.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 7 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 7 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 7 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 & (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 12 \\ 14 & 10 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) Matrica A je tipa (2×2) i matrica B je tipa (2×2) pa su produkti $A \cdot B$ i $B \cdot A$ mogući. Rezultati će biti matrice tipa (2×2) .

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 0 + 7 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 7 + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & (-1) \cdot 7 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Primijetite da vrijedi $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Zadatak 2.2.6. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Izračunajte $A \cdot I$ i $I \cdot A$ gdje je I

jedinična matrica reda 3.

Rješenje:

$$\begin{aligned} A \cdot I &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A \\ I \cdot A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

Napomena 2.2.3. Kvadratna matrica se ne mijenja ako je pomnožimo jediničnom matricom istog reda. Dakle, jedinična matrica u matricnom množenju ima istu ulogu koju broj jedan ima kod množenja realnih brojeva.

2.3 Determinanta matrice

Determinanta matrice je realan broj koji pridružujemo kvadratnim matricama. Ako je A kvadratna matrica onda se determinanta matrice A označava $\det(A)$ ili $|A|$.

Determinanta matrice definira se induktivno, to jest determinanta matrice reda n računa se koristeći determinante matrica reda $n - 1$.

Determinanta matrice reda 1:

Neka je $A = [a_{11}]$ matrica reda 1. Determinanta matrice A definira se kao

$$\det A = |A| = a_{11}.$$

Determinanta matrice reda n , gdje je $n > 1$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

računa se **Laplaceovim razvojem po retku ili stupcu**.

Za proizvoljan redak i matrice A i proizvoljan stupac j matrice A vrijedi:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \text{ - Laplaceov razvoj po } i\text{-tom retku}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \text{ - Laplaceov razvoj po } j\text{-tom stupcu}$$

gdje je A_{ij} **algebarski komplement** matrica A

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

a M_{ij} je determinanta reda $n - 1$ koja se iz polazne determinante $\det A$ dobije izostavljanjem i -tog retka i j -tog stupca.

Napomena 2.3.1. Matrice se zapisuju u uglatim zagradama dok se determinante zapisuju u okomitim zagradama.

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ je matrica - tablica brojeva, dok je $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ determinanta - realan broj.

Primjer 2.3.1. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Izračun $\det A$ razvojem po prvom retku:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} |3| + 1 \cdot (-1)^{1+2} |0| = 2 \cdot 3 - 0 = 6$$

Izračun $\det A$ razvojem po drugom stupcu:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} |0| + 3 \cdot (-1)^{2+2} |2| = 0 + 3 \cdot 2 = 6$$

Kod izračuna determinante Laplaceovim razvojem, stupac ili redak koji se koristi za razvoj bira se proizvoljno. Ako postoji stupac ili redak koji u sebi sadrži 0 (ili više 0) račun će biti jednostavniji ako se izabere upravo taj stupac ili redak za razvoj. Razlog je što se množeći s nulom gube pribrojnici u sumi Laplaceovog razvoja.

Primjer 2.3.2. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Izračun $\det A$ razvojem po

drugom stupcu:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \cdot (2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 0 - 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 4) + 1 \cdot (2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 3 - 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 1) = \\ &= -2 \cdot 4 + 1 \cdot 7 = -1 \end{aligned}$$

Determinanta matrice reda 2

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} |a_{22}| + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} |a_{21}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Dakle, determinanta matrice reda 2 računa se tako da se pomnože elementi na glavnoj dijagonali i od njih oduzmu pomnoženi elementi sa sporedne dijagonale.

Primjer 2.3.3. Koristeći gornju formulu determinanta matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

je

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1 - 6 = -7$$

Računanje determinante općenite matrice reda 3.

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\
 &= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\
 &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \\
 &= a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}
 \end{aligned}$$

Gore navedena formula može se izvesti koristeći tzv. **Sarrusovo pravilo**:

- Determinanta reda 3 zapisuje se na način da se prva dva stupca prepisuju s desne strane determinante.
- Zbrajaju se umnošci elemenata na glavnoj dijagonali i pravcima paralelnim glavnoj dijagonali.
- Zatim se od tog zbroja oduzimaju pomnoženi elementi na sporednoj dijagonali i na pravcima paralelnim sporednoj dijagonali.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & + & & + & & + & \\
 & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & \\
 & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & \\
 & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & \\
 & - & & - & & - &
 \end{array}
 \begin{array}{cc}
 a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32}
 \end{array}$$

Zadatak 2.3.1. Izračunajte determinantu matrice A koristeći Sarrusovo pravilo ako je:

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-2) \cdot 4 - \\ &\quad - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0 + 0 + 1 - 8 + 6 - 0 = -1\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 \cdot 1 - \\ &\quad - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Za računanje determinante vrijede sljedeća svojstva:

- Ako se matrica B dobije tako da se u matrici A zamijene mjesta dva retka ili dva stupca onda vrijedi $\det B = -\det A$.
- Transponirane matrice imaju jednake determinante, odnosno vrijedi $\det A = \det A^T$.
- Ako se matrica B dobije tako da se matrici A pomnoži jedan redak ili stupac realnim brojem α onda je $\det B = \alpha \det A$.
- Binet - Cauchyovo pravilo: Ako su A i B kvadratne matrice istog reda, onda je

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

- Ako su svi elementi nekog retka ili stupca matrice A jednaki nuli onda je $\det A = 0$.
- Ako su u determinanti dva retka ili dva stupca jednaka ili proporcionalna onda je determinanta jednaka nuli.
- Vrijednost determinante se ne mijenja ako se elementima nekog retka ili stupca pribroje elementi nekog drugog retka ili stupca pomnoženi realnim brojem α .

Zadnje svojstvo omogućava jednostavnije računanje determinante Laplaceovim razvojem po stupcu ili retku. Prije primjene Laplaceovog razvoja zadnje svojstvo omogućava da se u retku ili stupcu po kojem se radi razvoj dobije što više nula.

Primjer 2.3.4. Izračun determinante matrice A pomoću svojstva vezanih za računanje determinanti i Laplaceovog razvoja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz gore navedene matrice promatrajući prva dva retka može se uočiti da su elementi u drugom, trećem i četvrtom stupcu jednakih vrijednosti. Stoga, ako se drugi redak determinante pomnoži s -1 te potom zbroji s prvim retkom, u prvom retku dobiti će se tri nule, što će olakšati razvoj determinante po prvom retku.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{Razvoj po prvom retku} \\ &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{Razvoj po trećem retku} \\ &= 2 \cdot \left(3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = 2 \cdot 3 \cdot (-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = -18 \end{aligned}$$

2.4 Inverz matrice

Neka je $a \neq 0$ realan broj. Inverz od a , u oznaci a^{-1} je realan broj za koji vrijedi $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. U ovom poglavlju ideja je definirati sličan pojam inverza za matrice. U svijetu matrica jedinična matrica I ima ulogu jedinice. Kako se množiti mogu samo ulančane matrice, inverz matrice definira se samo za kvadratne matrice.

Neka je A kvadratna matrica reda n . Matrica B je **inverzna matrica** matrice A ako je

$$A \cdot B = B \cdot A = I,$$

gdje je I jedinična matrica reda n . Ako postoji, inverzna matrica je jedinstvena i označava se s A^{-1} .

Kod realnih brojeva, svaki ne nul broj ima inverz. Kod matrica, skup matrica koje nemaju inverz je veći. Neka je A kvadratna matrica. Matrica A je **regularna matrica** ako je $\det A \neq 0$, u suprotnom matrica A je singularna. Vrijedi da je kvadratna matrica A **invertibilna** (ima inverz) ako i samo ako je A regularna matrica.

Kako bi se opisao postupak računanja inverzne matrice, najprije je potrebno definirati pojmove minora ili subdeterminanta, algebarski komplement ili kofaktor te adjungirana matrica.

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n . Za $i, j \in \{1, \dots, n\}$ definira se:

- **Minora** ili **subdeterminanta** M_{ij} je determinanta reda $n - 1$ koja se iz polazne determinante dobije izostavljanjem i - tog retka i j - tog stupca.
- **Algebarski komplement** ili **kofaktor**: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
- **Adjungirana matrica** matrice A , u oznaci A^* , je matrica $A^* = [A_{ij}]^T$.

Ako je A kvadratna matrica onda se A^{-1} računa po formuli:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Zadatak 2.4.1. Odredite inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

Inverz matrice rješava se u nekoliko koraka: najprije je potrebno provjeriti je li zadana matrica regularna, a zatim izračunati adjungiranu matricu i nakon toga inverz matrice.

Matrica A je kvadratna matrica reda 3.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2 = -8$$

A je regularna matrica ($\det A = -8 \neq 0$) odnosno ima inverz.

Adjungirana matrica se dobije računanjem algebarskih komplementa za svaki par $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 1 = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot [A_{ij}]^T = \frac{1}{-8} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 3 & -5 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{-8} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-2}{-8} & \frac{3}{-8} & \frac{-1}{-8} \\ \frac{-2}{-8} & \frac{-5}{-8} & \frac{-1}{-8} \\ \frac{-4}{-8} & \frac{-6}{-8} & \frac{2}{-8} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zadatak 2.4.2. Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ regularna matrica. Odredite A^{-1} .

Rješenje:

Za svaki par $i, j \in \{1, 2\}$ računaju se algebarski komplementi:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} d \end{vmatrix} = d$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} c \end{vmatrix} = -c$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} b \end{vmatrix} = -b$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$$

$$\det A = ad - cb$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot [A_{ij}]^T = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Rješenje prethodnog zadatka može se koristiti kao formulu pri računanju inverza matrice reda 2.

Zadatak 2.4.3. Izračunajte inverz matrice A ako je:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Rješenje:

(a) Matrica A je kvadratna matrica reda 2.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 3 = 2 \neq 0$$

Dakle, matrica A je regularna, pa postoji A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{0}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(b) Matrica A nije kvadratna pa nema inverz.

(c) Matrica A je kvadratna matrica reda 2.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$$

Dakle, matrica A nije regularna, pa ne postoji A^{-1} .

Dvije matrice A i B istog tipa su **ekvivalentne** i piše se $A \sim B$ ako se jedna matrica može dobiti iz druge konačnom primjenom sljedećih **elementarnih transformacija**:

- Zamjena mjesta dvaju redaka (stupaca) matrice,
- Množenje nekog retka (stupca) realnim brojem različitim od nule,
- Pribrajanje elementima jednog retka (stupca) elemente nekog drugog retka (stupca) pomnožene realnim brojem.

Ukoliko je red regularne kvadratne matrice A veći od 3, inverz matrice je praktičnije računati na sljedeći način:

Formira se matrica tipa $n \times 2n$ oblika

$$\begin{bmatrix} A & : & I \end{bmatrix}$$

gdje je I jedinična matrica.

Elementarnim transformacijama isključivo po recima matrice $\begin{bmatrix} A & : & I \end{bmatrix}$ matrica se transformira u oblik

$$\begin{bmatrix} I & : & B \end{bmatrix}$$

Tada je $A^{-1} = B$.

Primjer 2.4.1. Inverz matrice primjenom elementarnih transformacija:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & : & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Drugi redak pomnoži se s (-1) i doda prvom:

$$\begin{bmatrix} A:I \end{bmatrix} \sim \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & : & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Treći redak se najprije doda prvom retku, a zatim se pomnožen s (-1) doda drugom:

$$\begin{bmatrix} A:I \end{bmatrix} \sim \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & : & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Zatim se posljednji redak množi s (-1) i dodaje se najprije prvom, potom trećem retku i na kraju se zbroji s drugim retkom:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} A & I \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A & & & I \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5 Matrične jednadžbe

Matrične jednadžbe su jednadžbe u kojima su nepoznanice matrice. Princip rješavanja matričnih jednadžbi sličan je principu rješavanja realnih linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom. Međutim, pri rješavanju matričnih jednadžbi potrebno je paziti na činjenicu da nije svaka matrica invertibilna, da nisu svake dvije matrice ulančane te da množenje matrica nije komutativno.

Jednadžba $ax = b$ gdje su $a \neq 0$ i b realni brojevi rješava se tako da se obje strane jednadžbe podijele s a . Odnosno, obje strane jednadžbe pomnože se s inverzom od a i dobije se

$$\begin{aligned} ax &= b \cdot a^{-1} \\ a^{-1}ax &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b \end{aligned}$$

Neka su A i B zadane matrice. Traži se matrica X takva da vrijedi:

$$A \cdot X = B$$

Neka je A kvadratna regularna matrica. Kako bi se na lijevoj strani dobila samo matrica X potrebno je obje strane jednadžbe pomnožiti s A^{-1} . Množenje matrica nije komutativno, pa treba paziti s koje strane se jednadžba množi. U ovom slučaju jednadžba se množi s A^{-1} s lijeve strane:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A \cdot X &= B \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ I \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Primjer 2.5.1. Dana je matrična jednadžba:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Traži se matrica } X \text{ za koju vrijedi:}$$

$$A \cdot X = B$$

Najprije je nužno provjeriti je li A invertibilna matrica. A je kvadratna matrica.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Dakle, A je regularna matrica tj. postoji A^{-1} .

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A \cdot X &= B \\ X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

A^{-1} je matrica reda 2 i B je matrica tipa (2×1) , što znači da su matrice A^{-1} i B ulančane, odnosno produkt $A^{-1} \cdot B$ je moguć. Rezultat će biti matrica tipa (2×1) .

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ X &= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rezultat se može provjeriti množenjem matrica:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrična jednadžba oblika:

$$X \cdot A = B$$

gdje su A i B zadane matrice rješava se tako da se obje strane jednadžbe pomnože s A^{-1} s desne strane.

$$\begin{aligned} X \cdot A &= B \cdot A^{-1} \\ X \cdot (A \cdot A^{-1}) &= B \cdot A^{-1} \\ X \cdot I &= B \cdot A^{-1} \\ X &= B \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

Primjer 2.5.2. Dana je matrična jednadžba:

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$. Traži se matrica X za koju vrijedi:

$$X \cdot A = B$$

Najprije je nužno provjeriti je li A invertibilna matrica. A je kvadratna matrica.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Dakle, A je regularna matrica tj. postoji A^{-1} .

$$\begin{aligned} X \cdot A &= B \cdot A^{-1} \\ X &= B \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

A^{-1} i B su matrice reda 2, što znači da su ulančane, odnosno produkt $A^{-1} \cdot B$ je moguć. Rezultat će biti matrica reda 2.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ X &= B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Provjera rezultata množenjem matrica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

2.6 Sustavi linearnih jednadžbi

Pomoću matrica rješavaju se sustavi linearnih jednadžbi. Neka je zadan sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$a_{ij}, b_j, i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$ su realni brojevi, a $x_1, \dots, x_n$ su nepoznanice. Ako se koeficijenti iz linearnih jednadžbi poredaju u matrice A, X i B na sljedeći način:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

onda se sustav može zapisati u matričnom obliku:

$$A \cdot X = B.$$

Matrica A je tipa $(m \times n)$, matrica X je tipa $(n \times 1)$, a matrica B tipa $(m \times 1)$. Elementi matrice B nazivaju se slobodnim koeficijentima, a matrica A **matrica sustava**.

2.6.1 Cramerova metoda

Neka je zadan sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Ako je matrica sustava $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ regularna matrica onda

se ovakav sustav naziva **Cramerov sustav** i može se rješavati Cramerovom metodom. Neka je D determinanta sustava

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

S $D_j, j \in \{1, \dots, n\}$ označava se determinanta koju se dobije zamjenom j – otog stupca u determinanti D sa stupcem sastavljenim od slobodnih

članova.

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Tada je rješenje sustava jednadžbi dano s

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Primjer 2.6.1. Rješenje sustava jednadžbi pomoću Cramerove metode:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ 2x - y &= 3 \\ 2x + 2z &= 4 \end{aligned}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ je matrica sustava, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ je matrica slobodnih koeficijenata te je $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ matrica nepoznanica.

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - (-2) - 0 - 4 = -8 \neq 0$$

Dakle, sustav je Cramerov, pa se može rješavati Cramerovom metodom. Za

$j = 1, 2, 3$ računa se D_j :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 0 - 4 - 0 - 6 = -16$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 8 + 6 - 0 - 12 = -8$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 6 + 0 - (-6) - 0 - 8 = 0$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{-8}{-8} = 1$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{0}{-8} = 0$$

Provjeru se vrši uvrštavajući x, y i z u zadane jednačbe:

$$2 + 1 - 0 = 3$$

$$2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 4$$

2.6.2 Gauss-Jordanove metode eliminacije

Ukoliko broj nepoznanica i broj jednačbi u sustavu nisu jednaki ili ako matrica sustava nije regularna, sustav se ne može riješiti Cramerovom metodom. U tom slučaju mogu se koristiti Gauss-Jordanove metode eliminacije. Neka je zadan sustav od m linearnih jednačbi s n nepoznanica:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Proširena matrica sustava A_p je matrica tipa $(m \times (n + 1))$ koja se dobije tako da se na matricu sustava A s desne strane nadopiše stupac slobodnih

koeficijenata:

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

Elementarnim transformacijama na redcima proširene matrice cilj je lijevi dio matrice transformirati u jediničnu matricu. Brojevi u posljednjem stupcu matrice koji se dobiju nakon svođenja desnog dijela proširene matrice sustava na jediničnu matricu su rješenja sustava.

Primjer 2.6.2. Rješenje sustava jednadžbi Gauss-Jordanovom metodom eliminacije:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= -5 \\ x + 2z &= 1 \\ 2y + 2z &= -2 \\ 3x - 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots & -5 \\ 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & -2 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Elementarnim transformacijama na redcima proširene matrice lijevi dio ma-

trice se nastoji transformirati u jediničnu matricu.

$$\begin{aligned}
 A_p &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots & -5 \\ 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & -2 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Zamjena } R_1 \text{ i } R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & -5 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & -2 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \\
 &\xrightarrow{\substack{R_2-2R_1 \\ R_4-3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & -2 \\ 0 & -2 & -7 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3-2R_2 \\ R_4+2R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 12 & \vdots & 12 \\ 0 & 0 & -17 & \vdots & -17 \end{bmatrix} \sim \\
 &\xrightarrow{R_3:12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -17 & \vdots & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1-2R_3 \\ R_2+5R_3 \\ R_4+17R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Oдавde se iščitava $x = -1, y = -2, z = 1$. Provjera se vrši uvrštavajući x, y i z u zadane jednadžbe:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot (-1) + (-2) - 1 &= -5 \\
 -1 + 2 \cdot 1 &= 1 \\
 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 &= -2 \\
 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) - 1 &= 0
 \end{aligned}$$

Napomena 2.6.1. Cramerovi sustavi mogu se rješavati i Cramerovom metodom i Gauss-Jordanovom metodom eliminacije.

U prethodnom primjeru sustav je imao jedinstveno rješenje. Međutim, moguće je da sustav ima beskonačno mnogo rješenja, ili da nema nijedno rješenje.

Primjer 2.6.3. Rješenje sustava jednadžbi Gauss-Jordanovom metodom eliminacije:

$$\begin{aligned}
 x + 2y - z &= 2 \\
 -x - y + z &= 0 \\
 x + 3y &= 7 \\
 y - 2z &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_p &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 2 \\ -1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 3 & 0 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{smallmatrix} R_2+R_1 \\ R_3-R_1 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim \\
&\xrightarrow[\sim]{\begin{smallmatrix} R_1-2R_2 \\ R_3-R_2 \\ R_4-R_2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{smallmatrix} R_1+R_3 \\ R_4+2R_3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Iz četvrtog retka se iščitava $0 = 6$, što je kontradikcija. Oдавde se zaključuje da ovaj sustav jednađbi nema rješenja, to jest ne postoje realni brojevi x, y i z koji zadovoljavaju sve četiri dane jednađbe.

Primjer 2.6.4. Rješenje sustava jednađbi Gauss-Jordanovom metodom eliminacije:

$$\begin{aligned}
x + 3y + 2z &= -6 \\
-x - y + 2z &= -10 \\
2y + 4z &= -16 \\
x + y - 2z &= 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_p &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \vdots & -6 \\ -1 & -1 & 2 & \vdots & -10 \\ 0 & 2 & 4 & \vdots & -16 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{smallmatrix} R_2+R_1 \\ R_4-R_1 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \vdots & -6 \\ 0 & 2 & 4 & \vdots & -16 \\ 0 & 2 & 4 & \vdots & -16 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & 16 \end{bmatrix} \sim \\
&\xrightarrow[\sim]{R_2:2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \vdots & -6 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -8 \\ 0 & 2 & 4 & \vdots & -16 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{smallmatrix} R_1-3R_2 \\ R_3-R_2 \\ R_4+2R_2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & \vdots & 18 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

U ovom slučaju elementarnim transformacijama na redcima eliminirale su se dvije jednađbe pa je ostalo manje jednađbi nego što sustav ima nepoznanica. Oдавde slijedi da ovaj sustav jednađbi ima beskonačno mnogo rješenja. Nepoznanicu z označimo s t , gdje t predstavlja promjenjivi parametar. Iz

proširene matrice onda slijedi:

$$\begin{aligned}x - 4t &= 18 \Rightarrow x = 4t + 18 \\y + 2t &= -8 \Rightarrow y = -2t - 8\end{aligned}$$

Dakle, sustav jednadžbi ima beskonačno mnogo rješenja, a svako rješenje je oblika:

$$\begin{aligned}x &= 4t + 18 \\y &= -2t - 8 \\z &= t\end{aligned}$$

gdje je $t \in \mathbb{R}$. Ovakvo rješenje naziva se parametarsko rješenje sustava.

2.7 Zadaci za vježbu

Zadatak 2.7.1. Neka su dane matrice A i B . Odredite matrice:

$$A + B, 2A - B, AB, BA, A^T, B^T, A^{-1}, B^{-1}.$$

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Rješenje:

$$(a) \quad A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2A - B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrica A je reda (2×2) i matrica B je reda $(2 \times 2) \Rightarrow$ produkti $A \cdot B$ i $B \cdot A$ su mogući. Rezultati će biti matrice reda (2×2) .

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A i B su kvadratne matrice.

$$\det A = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = -4 \neq 0$$

Dakle, matrica A je regularna, pa postoji A^{-1} .

$$\det B = (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 = -4 \neq 0$$

Dakle, matrica B je regularna, pa postoji B^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(b) Matrice $A + B$ i $2A - B$ ne postoje.

$$AB = \begin{bmatrix} 15 & -2 \\ 33 & -6 \\ 51 & -10 \end{bmatrix}, BA \text{ ne postoji.}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \text{ ne postoji, } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(c) $A + B = \begin{bmatrix} 15 & -2 \\ 33 & -6 \\ 51 & -10 \end{bmatrix}, 2A - B = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 6 & 6 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$
 AB i BA ne postoje.

$$A^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

A^{-1} i B^{-1} ne postoje.

$$(d) \quad A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, 2A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$(e) \quad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, 2A - B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 7 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.7.2. Neka su dane matrice A i B . Odredite matrice $AB - 2A^T$.

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(e) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

- (a) Matrica A je reda 2 i matrica B je reda 2 pa je produkt AB moguć. Rezultat će biti matrica reda 2.

$$A \cdot B - 2 \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

- (c) Ne postoji jer matrice AB i A^T nisu istog tipa.

- (d) Ne postoji jer matrice AB i A^T nisu istog tipa.

$$(e) \quad \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 13 & 5 & 2 \\ 9 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.7.3. Riješite sljedeće matrične jednačbe:

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Rešenje:

(a) Rješenje:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

A je kvadratna matrica.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow A \text{ je regularna matrica tj. postoji } A^{-1}$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

A^{-1} je matrica reda 2 i B je matrica reda 2 $\Rightarrow$ produkt $A^{-1} \cdot B$ je moguć. Rezultat će biti matrica reda 2.

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

$$X \cdot A = B$$

A je kvadratna matrica.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow A \text{ je regularna matrica tj. postoji } A^{-1}$$

$$X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

B i A^{-1} su matrice reda 2. produkt $B \cdot A^{-1}$ je moguć. Rezultat će biti matrica reda 2.

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -10 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

$$A \cdot X = B$$

A je kvadratna matrica.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ je regularna matrica tj.}$$

postoji A^{-1}

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

A^{-1} je matrica reda 3 i B je matrica reda 3 $\Rightarrow$ produkt $A^{-1} \cdot B$ je moguć. Rezultat će biti matrica reda 3.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{\det A} [A_{ij}]^T = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -4 & -8 & -7 \\ 3 & 6 & 5 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.7.4. Za zadane matrice A i B riješite matričnu jednadžbu

$$XA - B = 2X.$$

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned} X \cdot A - B &= 2 \cdot X \\ X \cdot A - 2 \cdot X &= B \\ X \cdot A - 2 \cdot X \cdot I &= B \\ X \cdot (A - 2 \cdot I) &= B \\ X &= B(A - 2 \cdot I)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - 2 \cdot I &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ (A - 2 \cdot I)^{-1} &= \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \\ X &= B(A - 2 \cdot I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(b) \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.7.5. Za zadane matrice A i B riješite matričnu jednadžbu

$$3X - AX = B.$$

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned} 3X - A \cdot X &= B \\ 3 \cdot I \cdot X - A \cdot X &= B \\ (3 \cdot I - A) \cdot X &= B \\ X &= (3 \cdot I - A)^{-1} B \\ X &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Zadatak 2.7.6. Rješite sustave jednažbi Cramerovom i Gauss-Jordanovom metodom:

(a)

$$\begin{aligned} x - 3y &= 6 \\ 2x + 5y &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 9 \\ x - 2y + z &= -2 \\ 3x + 2y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x - 2y - 5z &= -12 \\ -2x + y + 7z &= 15 \\ 3y + 4z &= 12 \end{aligned}$$

Rješenje:

(a) • Cramerova metoda

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 33$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$x = \frac{33}{11} = 3$$

$$y = \frac{-11}{11} = -1$$

• Gauss-Jordanova metoda

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 11 & -11 \end{bmatrix} \sim$$

$$\xrightarrow{R_2:11} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x = 3$$

$$y = -1$$

(b) • Cramerova metoda

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 3 + 6 - (-18) - 4 - 2 = 13$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -2 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -36 + 7 - 12 - (-42) - 18 - (-4) = -13$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -8 + 27 + 21 - (-18) - 14 - 18 = 26$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -28 - 6 + 18 - (-54) - (-8) - 7 = 39$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-13}{13} = -1$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{26}{13} = 2$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{39}{13} = 3$$

- Gauss-Jordanova metoda

$$\begin{aligned}
 A_p &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Zamjena } R_1 \text{ i } R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \\
 &\xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 8 & -1 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2:5} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 8 & -1 & 13 \end{bmatrix} \sim \\
 &\xrightarrow{\substack{R_3 - 8R_2 \\ R_1 + 2R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{5} & -\frac{39}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot \frac{-5}{13}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \\
 &\xrightarrow{\substack{R_2 - \frac{1}{5}R_3 \\ R_1 - \frac{7}{5}R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \\
 &\quad x = -1 \\
 &\quad y = 2 \\
 &\quad z = -3
 \end{aligned}$$

- (c)
 - Cramerova metoda

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -3 \\
 D_1 &= \begin{vmatrix} -12 & -2 & -5 \\ 15 & 1 & 7 \\ 12 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 \\
 D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & -12 & -5 \\ -2 & 15 & 7 \\ 0 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -12 \\ -2 & 1 & 15 \\ 0 & 3 & 12 \end{vmatrix} = -9 \\
 x &= \frac{D_1}{D} = \frac{-9}{-3} = 3 \\
 y &= \frac{D_2}{D} = \frac{0}{-3} = 0 \\
 z &= \frac{D_3}{D} = \frac{-9}{-3} = 3
 \end{aligned}$$

- Gauss-Jordanova metoda

$$\begin{aligned}
 A_p &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -12 \\ -2 & 1 & 7 & 15 \\ 0 & 3 & 4 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -12 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 12 \end{bmatrix} \sim \\
 &\xrightarrow{R_2:3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_3-3R_2 \\ R_1+2R_2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} R_1+3R_3 \\ R_2-R_3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &\quad x = 3 \\
 &\quad y = 0 \\
 &\quad z = 3
 \end{aligned}$$

Zadatak 2.7.7. Prijevozničko poduzeće posjeduje 3 vrste autobusa: Fiat, Volvo te Opel autobuse. Zbog kvara na glavnom serveru poduzeće je izgubilo informacije o broju sjedišta u svakom od tipova autobusa. Na sreću, poduzeće je pronašlo sigurnosne kopije informacija o ukupnom broju prevezenih putnika za 8., 9. i 10. studenog.

Osmog studenog prijevozničko poduzeće ukupno je prevezlo 336 putnika. Prijevoz se obavio koristeći 5 Fiat autobusa, 2 Volvo autobusa te 1 Opel autobus.

Devetog studenog prijevozničko poduzeće ukupno je prevezlo 214 putnika. Prijevoz se obavio koristeći 4 Fiat autobusa i 1 Volvo autobus.

Desetog studenog prijevozničko poduzeće ukupno je prevezlo 314 putnika. Prijevoz se obavio koristeći 1 Fiat autobus, 5 Volvo autobusa te 2 Opel autobusa.

Podaci o broju prevezenih putnika sumirani su u donjoj tablici.

Datum / Vrsta autobusa	Fiat	Volvo	Opel	Broj putnika
8. studenog	5	2	1	336
9. studenog	4	1	0	214
10. studenog	1	5	2	314

Ukoliko je poznato da je svakog dana svaki autobus odvozio samo jednu rutu, te da su sva sjedišta bila popunjena, koliko sjedišta ima svaka vrsta autobusa koju posjeduje prijevozničko poduzeće?

- Zapišite problem kao sustav linearnih jednadžbi.
- Preporučite metodu i riješite sustav jednadžbi.

Rješenje:

Neka je:

x broj sjedišta u Fiat autobusu,

y broj sjedišta u Volvo autobusu

z broj sjedišta u Opel autobusu.

$$5x + 2y + z = 336$$

$$4x + y = 214$$

$$x + 5y + 2z = 314$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 336 \\ 214 \\ 314 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\det A = D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 20 - 1 - 16 = 13 \neq 0$$

Determinanta sustava je različita od nule, pa je sustav Cramerov.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 336 & 2 & 1 \\ 214 & 1 & 0 \\ 314 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 336 & 2 \\ 214 & 1 \\ 314 & 5 \end{vmatrix} = 672 + 1070 - 314 - 856 = 572$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 336 & 1 \\ 4 & 214 & 0 \\ 1 & 314 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 336 \\ 4 & 214 \\ 1 & 314 \end{vmatrix} = 2140 + 1256 - 214 - 2688 = 494$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 336 \\ 4 & 1 & 214 \\ 1 & 5 & 314 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1570 + 428 + 6720 - 336 - 5350 - 2512 = 520$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{572}{13} = 44$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{494}{13} = 38$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{520}{13} = 40$$

Fiat autobusi imaju 44, Volvo autobusi 38, a Opel autobusi 40 sjedišta.

Zadatak 2.7.8. Prijevozničko poduzeće prevozi tri vrste tereta sa četiri različita tipa kamiona. Volvo kamion, čiji je kapacitet 3 tone, prevozi jedan paket tereta A, jedan paket tereta B i 2 paketa tereta C. Mercedes Benz

kamion, čiji je kapacitet 2 tone, prevozi jedan paket tereta B i 2 paketa tereta C. Fiat kamion, čiji je kapacitet 8.5 tona, prevozi dva paketa tereta A, tri paketa tereta B i 7 paketa tereta C. Ford kamion, čiji je kapacitet 5 tona, prevozi jedan paket tereta A, dva paketa tereta B i 4 paketa tereta C. Informacije su sumirane u donjoj tablici: Kolike su mase tereta A, B i C?

Vrsta kamiona / Tip Tereta	A	B	C	Kapacitet kamiona
Volvo	1	1	2	3
Mercedes Benz	0	1	2	2
Fiat	2	3	7	8.5
Ford	1	2	4	5

(a) Zapišite problem kao sustav linearnih jednadžbi.

(b) Preporučite metodu i riješite sustav jednadžbi.

Rjesenje:

$x \Rightarrow$ masa paketa tereta A;

$y \Rightarrow$ masa paketa tereta B;

$z \Rightarrow$ masa paketa tereta C;

$$x + y + 2z = 3$$

$$y + 2z = 2$$

$$2x + 3y + 7z = 8.5$$

$$x + 2y + 4z = 5$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 2 & 3 & 7 & \vdots & 8.5 \\ 1 & 2 & 4 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} R_3 - 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 2.5 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} R_1 - R_2 \\ R_3 - R_2 \\ R_4 - R_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{R_2 - 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = 1$$

$$y = 1$$

$$z = 0.5$$

Mase paketa tereta A i B iznose 1, a masa paketa tereta C 0.5 tona.

Poglavlje 3

Vektori

U ovom poglavlju obrađen je klasični vektorski račun. Veličine poput duljine, površine, mase, topline i slično određene su jednim podatkom i to mjerenim brojem i nazivaju se **skalari**, dok je za veličine poput orijentirane dužine, brzine, akceleracije, sile i slično potrebno znati i njihov smjer i orijentaciju. Takve veličine nazivaju se **vektori**.

3.1 Osnovni pojmovi

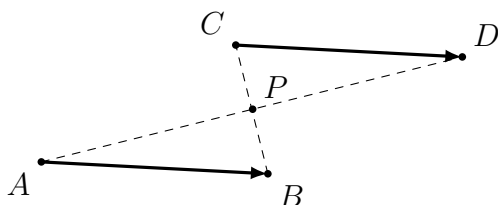
Neka su A, B točke u trodimenzionalnom prostoru. Uređeni par (A, B) gdje je točka A početak, a točka B kraj naziva se **usmjerena dužina**. Usmjerena dužina označava se s

$$\overrightarrow{AB}$$

Translatirajući usmjerenu dužinu $\overrightarrow{AB}$ kroz trodimenzionalni prostor dolazi se do druge usmjerene dužine $\overrightarrow{CD}$ za koju vrijedi:

- Udaljenost od A do B jednaka je kao udaljenost od C do D .
- Usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ leže na paralelnim pravcima, odnosno istog su smjera.
- Usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ jednako su orijentirane, odnosno pokazuju u istom smjeru.

Napomena 3.1.1. Vrijedi da je polovište dužina $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ ista točka.



Za danu usmjerenu dužinu $\overrightarrow{AB}$ promatra se skup svih usmjerenih dužina $\overrightarrow{CD}$ za koje vrijedi da je polovište dužina $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ ista točka. Takav skup naziva se **vektor** određen usmjerenom dužinom $\overrightarrow{AB}$. Usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ je jedan predstavnik vektora. Vektore najčešće označavaju malim slovima sa strelicom poviše slova: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$. Činjenicu da je vektor $\vec{a}$ predstavljen dužinom $\overrightarrow{AB}$ označavamo s:

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$$

Napomena 3.1.2. U daljnjem tekstu poistovjećuje se usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ s vektorom koji ta usmjerena dužina predstavlja.

Svaki vektor je jednoznačno određen s:

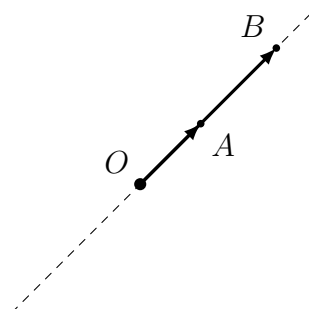
- duljinom (modul, apsolutna vrijednost, norma)
- smjerom (nosač, pravac nositelj)
- orijentacijom (smisao, usmjerenje)

Modul ili **duljina** vektora $\vec{a}$ je duljina predstavnika $\overrightarrow{AB}$ tog vektora, tj. broj koji se dobiva mjerenjem dužine $\overline{AB}$

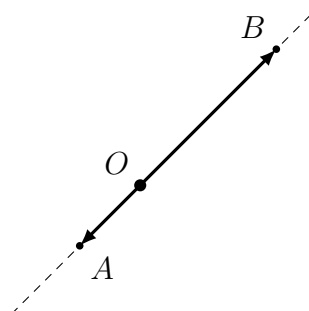
$$|\vec{a}| = |\overline{AB}|$$

Smjer vektora $\vec{a}$ je smjer pravca AB određenog predstavnikom $\overrightarrow{AB}$ vektora $\vec{a}$. Očito je da smjer vektora ne zavisi o izboru predstavnika, jer su pravci koje određuju usmjerene dužine iz iste klase paralelni, a paralelni pravci imaju isti smjer.

Orijentacija vektora $\vec{a}$ određena je orijentacijom bilo kojeg predstavnika tog vektora. Ako su $\vec{a}, \vec{b}$ vektori istog smjera, a $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ predstavnici tih vektora s istim početkom O , onda je jasno da će točke O, A i B ležati na istom pravcu p . Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kaže se da imaju **istu orijentaciju** ako točke A i B leže na pravcu p s iste strane točke O . Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **suprotnih orijentacija** ako su točke A i B s različitih strana točke O .



Vektori istog smjera



Vektori suprotnog smjera

Dva vektora koja imaju jednaku duljinu i isti smjer a suprotne orijentacije zovu se **suprotni vektori**. Suprotan vektor vektoru $\vec{a}$ označava se s $-\vec{a}$.

Vektor kojemu se podudaraju početna i završna točka naziva se **nul-vektor** i označava s $\vec{0}$. Njegova duljina je 0, a smjer odnosno orijentacija su mu neodređeni.

Za vektor $\vec{a}$ kaže se da je **jedinični vektor** ukoliko je duljina vektora jednaka jedan, odnosno

$$|\vec{a}| = 1$$

3.2 Operacije s vektorima

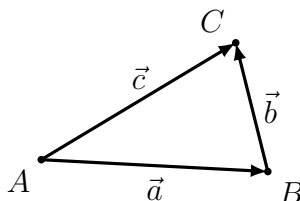
U skupu svih vektora mogu se vršiti operacije s vektorima i to zbrajanje vektora te množenje vektora skalarom.

3.2.1 Zbrajanje vektora

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori te neka su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ predstavnici tih vektora tako da početna točka predstavnika vektora $\vec{b}$ leži u krajnjoj točki predstavnika vektora $\vec{a}$. Tada se definira **zbroj vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kao vektor $\vec{c}$ čiji je predstavnik

usmjerena dužina $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{AC}]$$



Gornja definicija naziva se **pravilo trokuta**. Zbrajanje više vektora se vrši na način da se od vektora koje treba zbrojiti pravi "lanac". Lanac se pravi tako da se početna točka slijedećeg vektora stavlja u završnu točku prethodnog vektora. Suma svih vektora jest vektor čija je početna točka početna točka prvog vektora, a završna točka završna točka posljednjeg vektora.

Razlika vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u oznaci

$$\vec{a} - \vec{b}$$

je zbroj vektora $\vec{a}$ i vektoru $\vec{b}$ suprotnog vektora $-\vec{b}$,

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Za zbrajanje vektora vrijedi

- Komutativnost

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- Asocijativnost

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

- Svojstvo suprotnog vektora

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

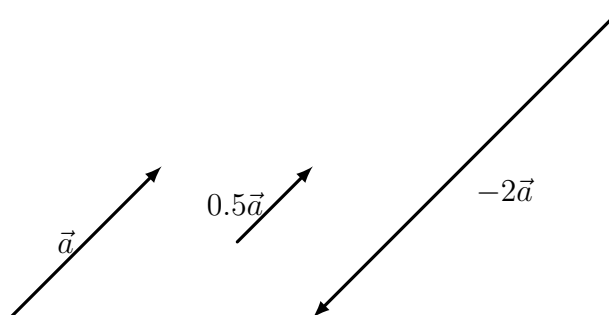
- Svojstvo nul-vektora

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

3.2.2 Množenje vektora skalarom

Operacija množenja vektora skalarom podrazumijeva množenje vektora realnim brojem. Ova operacija je produljivanje, odnosno skraćivanje vektora ovisno s kojim se realnim brojem množi vektor. **Produkt realnog broja $\lambda \in \mathbb{R}$ i vektora $\vec{a}$** je vektor u oznaci $\lambda\vec{a}$ za koji vrijedi:

- Duljina vektora $\lambda\vec{a}$ jednaka je produktu apsolutne vrijednosti realnog broja λ i duljine vektora $\vec{a}$, tj. $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.
- Smjer vektora $\lambda\vec{a}$ jednak je smjeru vektora $\vec{a}$.
- Orijehtacija vektora $\lambda\vec{a}$ jednaka je orijentaciji vektora $\vec{a}$, ako je $\lambda > 0$, a suprotna orijentaciji vektora $\vec{a}$, ako je $\lambda < 0$.



Napomena 3.2.1. $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ ako i samo ako je $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$.

Za množenje vektora skalarom vrijedi:

- Kvaziasocijativnost

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

- Posjedovanje jedinice

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

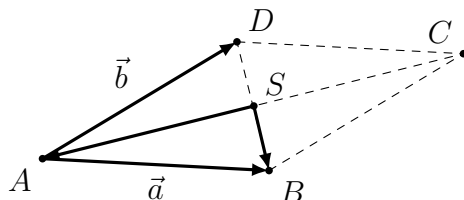
- Distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

- Distributivnost u odnosu na zbrajanje vektora

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

Primjer 3.2.1. Točka S je sjecište dijagonala paralelograma $ABCD$. Neka je $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Izrazite vektore $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$ preko vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

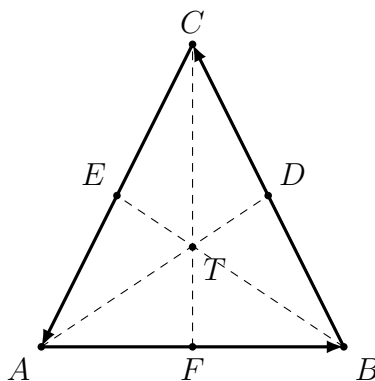


Rješenje:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SC} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{SD} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

Primjer 3.2.2. Neka su vektori $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ stranice trokuta ABC .

- Pomoću vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ izrazite težišnice trokuta $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$.
- Pokažite da i težišnice mogu biti stranice nekog trokuta.
- Pokažite da je $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} \\ \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

(b) Za stranice trokuta vrijedi da je njihov zbroj jednak nuli $\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

Dakle, potrebno je pokazati da vrijedi $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = 0$

$$\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) + \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + \left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$(c) \vec{ED} = \vec{EC} + \vec{CD} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}(-\vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

3.3 Kolinearni i komplanarni vektori. Linearna zavisnost vektora

Kaže se da su vektori **kolinearni** ako imaju isti smjer. Nul-vektor je stoga kolinearan sa svakim vektorom. Također, iz definicije množenja vektora skalarom (smjer vektora $\lambda\vec{a}$ je isti kao i smjer vektora $\vec{a}$) slijedi da su i vektori $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ uvijek kolinearni. Prema tome ako za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ onda su ti vektori kolinearni.

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori i $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tada postoji i jednoznačno je određen realan broj $\lambda \in \mathbb{R}$ sa svojstvom da je

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}.$$

Vektor $\vec{a} = [\vec{AB}]$ je paralelan s nekom ravninom ako je pravac AB paralelan s tom ravninom, odnosno ako i samo ako je pravac AB paralelan s nekim pravcem u toj ravnini. Za vektore koji su paralelni s istom ravninom kaže se da su **komplanarni vektori**. Bilo koja dva vektora su uvijek komplanarni, tako da je o pojmu komplanarnosti zanimljivo promatrati skupove od tri ili više vektora. Kolinearni vektori su uvijek i komplanarni.

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ realni brojevi. Ako je vektor

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

tada su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

Napomena 3.3.1. Vrijedi i obrat: ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni vektori, a $\vec{c}$ bilo koji vektor komplanaran s njima, onda postoje i jednoznačno su određeni skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tri nekomplanarna vektora. Ako je $\vec{d}$ bilo koji vektor, onda postoje i jednoznačno su određeni skalari $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sa svojstvom da je

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

Neka su $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektori i $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ skalari za koje vrijedi

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

Vektor $\vec{a}$ zove se **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ s koeficijentima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

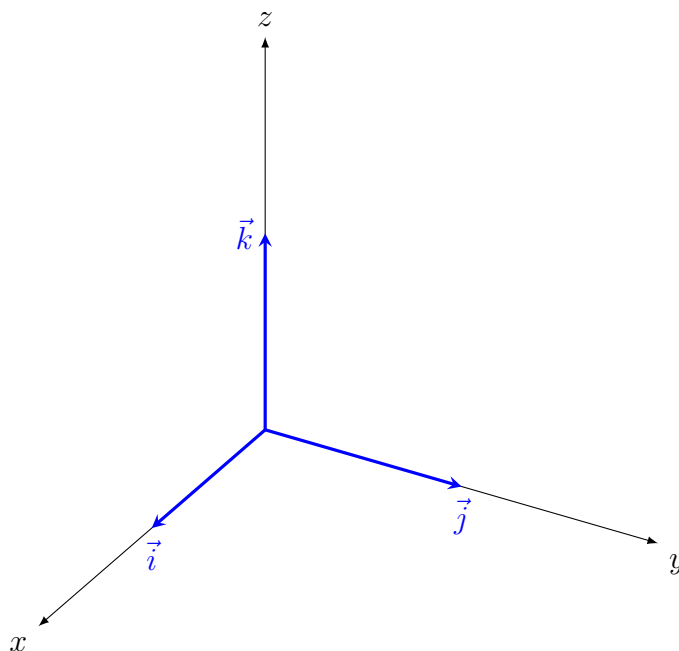
Za vektore $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ kaže se da su **linearno zavisni** ako postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ takvi da je

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

i bar je jedan od skalara $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ različit od nule. Ako su svi skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jednaki nuli tada su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ **linearno nezavisni**.

3.4 Vektori u koordinatnom sustavu

U prethodnom poglavlju je prikazano da ako se izberu bilo koja tri nekomplanarna vektora, svaki vektor u trodimenzionalnom prostoru može se na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija ta tri vektora. Međutim, postoje tri vektora koja se najčešće koriste da bi vektore prikazivali kao linearne kombinacije. To su vektori $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$. Vektor $\vec{i}$ je jedinični vektor u smjeru osi x , $\vec{j}$ jedinični vektor u smjeru osi y , a $\vec{k}$ jedinični vektor u smjeru osi z .



Vektor kojem je početna točka ishodište O koordinatnog sustava, a završna točka A naziva se **radij-vektor** točke A i označava se s $\vec{r}_A$. Za radij vektor točke A s koordinatama (x, y, z) vrijedi:

$$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ako su početna i završna točka vektora $\overrightarrow{AB}$ zadane svojim koordinatama $A = (x_1, y_1, z_1)$ i $B = (x_2, y_2, z_2)$ onda je

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

Primjer 3.4.1. Početak vektora nalazi se u točki $A(4, -3, 0)$, a kraj u $B(6, -2, 0)$. Prikažite vektor $\overrightarrow{AB}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$.
Rješenje:

$$\overrightarrow{AB} = (6 - 4)\vec{i} + (-2 - (-3))\vec{j} + (0 - 0)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

Zapis vektora kao linearne kombinacije vektora $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ olakšava operacije s vektorima. Ako su $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ vektori te λ i μ skalari onda je:

$$\begin{aligned}\vec{a} \pm \vec{b} &= (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k} \\ \lambda\vec{a} &= \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k} \\ \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} &= (\lambda a_x + \mu b_x)\vec{i} + (\lambda a_y + \mu b_y)\vec{j} + (\lambda a_z + \mu b_z)\vec{k}\end{aligned}$$

Dva vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ su **jednaka** ako i samo ako imaju jednake koordinate

$$a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$$

Primjer 3.4.2. Odredite parametar t takav da je zbroj vektora $\vec{a} = 2\vec{i} - t\vec{j} - 6\vec{k}$ i $\vec{b} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ jednak vektoru $\vec{c} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Rješenje:

Zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2\vec{i} - t\vec{j} - 6\vec{k}) + (-5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = (2 - 5)\vec{i} + (-t - 2)\vec{j} + (-6 + 3)\vec{k}$$

Dobiveni zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak je vektoru $\vec{c}$

$$\begin{aligned}(2 - 5)\vec{i} + (-t - 2)\vec{j} + (-6 + 3)\vec{k} &= -3\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k} \\ -3\vec{i} + (-t - 2)\vec{j} - 3\vec{k} &= -3\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}\end{aligned}$$

Iz jednakosti vektora dobije se parametar t

$$\begin{aligned}-3 &= -3, (-t - 2) = 5, -3 = -3 \\ -t &= 5 + 2 \rightarrow t = -7\end{aligned}$$

Duljina radij-vektora $\vec{r}_A = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ je

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Duljina vektora $\overrightarrow{AB}$ jednaka je duljini dužine $\overline{AB}$ stoga vrijedi

$$\overrightarrow{AB} = d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Primjer 3.4.3. Odredite duljinu vektora $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j}$ iz prethodnog primjera.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

Primjer 3.4.4. Odredite vektor $\vec{a}$ duljine 2 sa zadanim koordinatama

$$x = -1, z = 1$$

Rješenje:

Iz formule duljine vektora vrijedi

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ 2 &= \sqrt{(-1)^2 + y^2 + 1^2} \\ 4 &= 2 + y^2 \\ y &= \pm\sqrt{2} \\ \vec{a}_1 &= -\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{a}_2 &= -\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

Primjer 3.4.5. Odredite je li trokut ABC jednakokračan ili jednakostraničan ako je zadan radij-vektorima

$$\begin{aligned} \vec{r}_A &= -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{r}_B &= 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{r}_C &= -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

Rješenje:

Kako bi pokazali da je trokut ABC jednakokračan ili jednakostraničan potrebno je odrediti duljine stranica trokuta ABC .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \vec{r}_C - \vec{r}_A = -3\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ \overrightarrow{CB} &= \vec{r}_B - \vec{r}_C = 3\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ \overrightarrow{AB} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A = 3\vec{i} - 3\vec{k} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Trokut ABC je jednakostraničan.

Ako su α, β, γ kutevi koje vektor $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ zatvara s koordinatnim osima, tada su kosinusi smjera vektora dani formulom

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

Također vrijedi $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

3.5 Skalarni produkt vektora

Skalarni produkt dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definira se kao skalar koji je jednak produktu modula tih vektora s kosinusom kuta kojeg ti vektori zatvaraju:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Iz navedenog slijedi da je

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ prikazani kao linearna kombinacija vektora $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$, $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ i $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ tada vrijedi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Dakle vrijedi:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Kolinearnost vektora se može provjeriti preko skalarnog produkta:

- Ako su pravci nositelji vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ paralelni, tada je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ ili $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$, pa je $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ ili $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = -1$. Tada vrijedi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

i također vrijedi ako je:

– $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ vektori su iste orijentacije ili

– $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$ vektori su suprotnih orijentacija.

- Ako su pravci nositelji vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti tada je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

jer je kut između okomitih vektora $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ pa je $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Napomena 3.5.1. Vrijedi i obrat, ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ onda su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti vektori.

Primjer 3.5.1. Neka su točke $A(4, 3, 0)$, $B(3, 0, 2)$, $C(8, 1, -1)$ vrhovi trokuta ABC . Ispitajte kod kojeg vrha u trokutu je pravi kut.

Rješenje:

Najprije je potrebno odrediti vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ koji razapinju trokut ABC :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (3 - 4)\vec{i} + (0 - 3)\vec{j} + (2 - 0)\vec{k} = -\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \\ \overrightarrow{BC} &= (8 - 3)\vec{i} + (1 - 0)\vec{j} + (-1 - 2)\vec{k} = 5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \\ \overrightarrow{CA} &= (4 - 8)\vec{i} + (3 - 1)\vec{j} + (0 - (-1))\vec{k} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

Iz definicije skalarnog produkta vektora vrijedi da je skalarni produkt okomitih vektora jednak 0. Stoga je potrebno izračunati skalarne produkte vektora:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= -5 - 3 - 6 = -14 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} &= -20 + 2 - 3 = -21 \\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} &= 4 - 6 + 2 = 0\end{aligned}$$

Pravi kut zatvaraju vektori $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{AB}$, odnosno pravi kut je kod vrha A .

Za skalarni produkt vektora vrijede sljedeća svojstva:

- Komutativnost

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

- Kvaziasocijativnost

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

- Distributivnost prema zbrajanju

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

- Distributivnost prema množenju

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

- Pozitivna definitnost

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0; \vec{a}^2 = 0 \text{ ako i samo ako je } \vec{a} = 0.$$

Primjer 3.5.2. Odredite parametar t takav da vektori

$$\begin{aligned}\vec{a} &= t\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{b} &= t\vec{i} + t\vec{j} + 2\vec{k}\end{aligned}$$

budu međusobno okomiti.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ t \cdot t + 5 \cdot t + 2 \cdot 2 &= 0 \\ t^2 + 5t + 4 &= 0 \\ t(t + 4) + (t + 4) &= 0 \\ (t + 4)(t + 1) &= 0 \\ t_1 = -4, t_2 = -1\end{aligned}$$

Primjer 3.5.3. Odredite kut između dijagonala paralelograma koji je razapet vektorima

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} \text{ i } \vec{b} = -\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Rješenje:

Treba odrediti kut između vektora $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$ i vektora $\vec{f} = \vec{a} - \vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{e} &= (\vec{i} + 2\vec{j}) + (-\vec{j} + 2\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{f} &= (\vec{i} + 2\vec{j}) - (-\vec{j} + 2\vec{k}) = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}\end{aligned}$$

$$\cos\phi = \frac{\vec{e} \cdot \vec{f}}{|\vec{e}| \cdot |\vec{f}|} = \frac{(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})}{\sqrt{(1^2 + 1^2 + 2^2)} \cdot \sqrt{(1^2 + 3^2 + (-2)^2)}} = \frac{1 + 3 - 4}{\sqrt{6} \cdot 14} = 0$$

$$\cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = 90 \Rightarrow \text{dijagonale su okomite}$$

Primjer 3.5.4. Zadan je vektor

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$$

Odredite vektor $\vec{b}$ u ravnini takav da je $\vec{b} \perp \vec{a}$ i $|\vec{b}| = \sqrt{5}$.

Rješenje: Vektor $\vec{b}$ dan sa svojim koordinatama

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$$

Za okomite vektore vrijedi da je njihov skalarni produkt jednak 0

$$\begin{aligned}\vec{a} \perp \vec{b} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ (3\vec{i} + 6\vec{j}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) &= 0 \\ 3b_x + 6b_y &= 0\end{aligned}$$

Prema formuli duljine vektora

$$|\vec{b}| = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{5}$$

Dobiveni sustav jednadžbi glasi

$$\begin{aligned}3b_x + 6b_y &= 0 \\ b_x^2 + b_y^2 &= 5\end{aligned}$$

čija rješenja su

$$b_x = \pm 2, b_y = \mp 1$$

a traženi vektor

$$\vec{b}_1 = 2\vec{i} - \vec{j}, \vec{b}_2 = -2\vec{i} + \vec{j}$$

3.6 Vektorski produkt vektora

Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

za kojeg vrijedi:

- Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni onda je $\vec{c} = \vec{0}$.

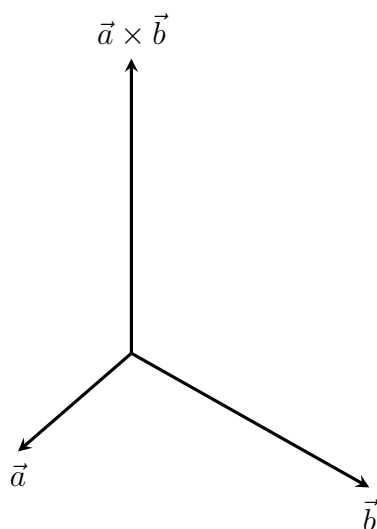
- Ako $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni vektori onda je vektor $\vec{c}$ vektor određen:

Duljina vektora $\vec{c}$ je jednaka

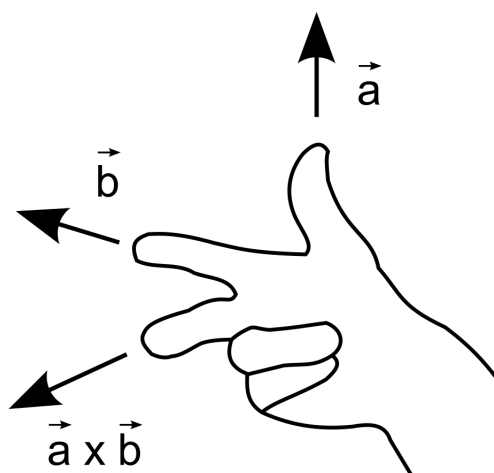
$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Smjer vektora $\vec{c}$ je pravac okomit na ravninu razapetu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Orijentacija vektora $\vec{c}$ je takva da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ čine desni sustav.



Pri određivanju orijentacije vektorskog produkta možemo se poslužiti pravilom desne ruke:



Za vektorsko množenje vektora vrijedi:

- Antikomutativnost

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

- Distributivnost prema zbrajanju

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

- Distributivnost prema množenju

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

- Kvaziasocijativnost

$$\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

Za svaki vektor $\vec{a}$ vrijedi

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

Površina paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je jednaka duljini njihovog vektorskog produkta, tj. vrijedi:

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Površina trokuta razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka je polovini površine paralelograma razapetog tim vektorima.

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ prikazani kao linearna kombinacija vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ i $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ tada vrijedi:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

Primjer 3.6.1. Odredite površinu trokuta ABC koji ima vrhove:

$$A(4, 4, 2)$$

$$B(2, 4, 2)$$

$$C(3, 3, 6)$$

Rješenje:

Površina trokuta dana je formulom

$$P = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{AB} = (2-4)\vec{i} + (4-4)\vec{j} + (2-2)\vec{k} = -2\vec{i} \\ \vec{b} &= \overrightarrow{AC} = (3-4)\vec{i} + (3-4)\vec{j} + (6-2)\vec{k} = -\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u gornju formulu, površina trokuta iznosi

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} \implies P = \frac{1}{2} \sqrt{68} \approx 4.123$$

Primjer 3.6.2. Izračunajte površinu paralelograma određenog vektorima

$$\vec{m} = 2\vec{b} - \vec{a} \text{ i } \vec{n} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

ako je $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

Rješenje:

Površina paralelograma dana je formulom

$$P = |\vec{m} \times \vec{n}|$$

Vektorski umnožak vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$

$$\begin{aligned}\vec{m} \times \vec{n} &= (2\vec{b} - \vec{a}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) \\ \vec{m} \times \vec{n} &= 2\vec{b} \times 3\vec{a} + 2\vec{b} \times 2\vec{b} - \vec{a} \times 3\vec{a} - \vec{a} \times 2\vec{b} \\ \vec{m} \times \vec{n} &= -6(\vec{a} \times \vec{b}) - 2(\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{m} \times \vec{n} &= -8(\vec{a} \times \vec{b})\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u gornju formulu, površina paralelograma iznosi

$$\begin{aligned}P &= |\vec{m} \times \vec{n}| = |-8(\vec{a} \times \vec{b})| = | -8 | \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| \\ P &= 8|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 8 \cdot 4 \cdot 5 \sin \frac{\pi}{4} = 160 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 80\sqrt{2}\end{aligned}$$

Primjer 3.6.3. Kolika je duljina visine spuštene iz vrha C trokuta ABC ako su dani vrhovi $A(2, 1, 0)$, $B(3, 1, 1)$, $C(-1, 0, 1)$.

Rješenje:

Visina trokuta može se dobiti iz formule za površinu trokuta

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \implies v_a = \frac{2P}{a} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Koordinate vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{AB} = \{3 - 2, 1 - 1, 1 - 0\} = \{1, 0, 1\} = \vec{i} + \vec{k} \\ \vec{b} &= \overrightarrow{AC} = \{-1 - 2, 0 - 1, 1 - 0\} = \{-3, -1, 1\} = -3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

Duljina vektorskog produkta

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{18}$$

Duljina vektora $\vec{a}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Uvrštavanjem u gornju formulu, duljina visine iznosi

$$v_a = \frac{2\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = 6$$

Primjer 3.6.4. Izračunajte površinu trokuta što ga razapinju vektori

$$\vec{x} = \vec{b} - \vec{a} \text{ i } \vec{y} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

ako su $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Rješenje:

Površina trokuta dana je formulom

$$P = \frac{1}{2}|\vec{x} \times \vec{y}|$$

Vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ su:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{b} - \vec{a} = (\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) - (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{y} &= 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 2(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) + (\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) - (4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u gornju formulu, površina trokuta iznosi

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

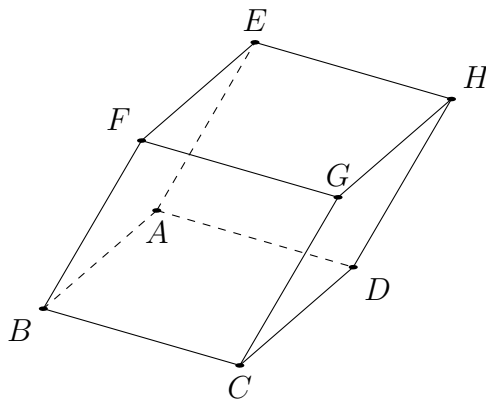
$$|\vec{x} \times \vec{y}| = \sqrt{6^2 + 6^2 + (-3)^2} = 9 \implies P = \frac{1}{2}|\vec{x} \times \vec{y}| = \frac{9}{2}$$

3.7 Mješoviti produkt vektora

Pod mješovitim produktom triju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ podrazumijeva se umnožak vektorskog produkta $\vec{a} \times \vec{b}$ koji se skalarno množi s vektorom $\vec{c}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Rezultat mješovitog produkta vektora je skalar. Mješoviti produkt triju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ do na predznak jednak je volumenu paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.



Dakle vrijedi:

$$V = |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|\sin\angle(\vec{a}, \vec{b})\cos\angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}),$$

gdje je V volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Napomena 3.7.1. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako je

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.$$

Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ prikazani kao linearna kombinacija vektora $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ i $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ tada vrijedi:

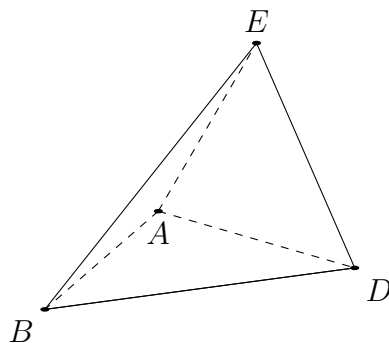
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Dakle, volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ je

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Volumen tetraedra razapetog vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ je

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$



Primjer 3.7.1. Izračunajte volumen tetraedra s vrhovima

$$A(1, 2, 1), B(2, 0, 3), C(1, 3, -1), D(2, -1, 3)$$

Rješenje:

Volumen tetraedra dan je formulom

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Koordinate vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{2 - 1, 0 - 2, 3 - 1\} = \{1, -2, 2\} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \{1 - 1, 3 - 2, -1 - 1\} = \{0, 1, -2\} = \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = \{2 - 1, -1 - 2, 3 - 1\} = \{1, -3, 2\} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$V = \frac{1}{6} |-7| = \frac{7}{6}$$

Primjer 3.7.2. Dokažite da su dani vektori komplanarni:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= -3\vec{i} + 2\vec{k} \\ \vec{b} &= 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} \\ \vec{c} &= 11\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}\end{aligned}$$

Rješenje:

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 11 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Zadatak 3.7.1. Neka su dane točke $A(2, 2, 0)$, $B(4, 4, 0)$, $C(0, 3, -2)$ i $D(0, 2, 2)$.

- Prikažite vektore $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$.
- Izračunajte $3\vec{a} - 2\vec{b}$.
- Izračunajte $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$.
- Kolike kuteve vektor $\vec{a}$ zatvara s koordinatnim osima?
- Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Jesu li vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno okomiti?
- Izračunajte površinu trokuta razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
- Koliki kut zatvaraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$?
- Izračunajte volumen paralelepipeda kojeg razapinju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$.

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{b} &= 0\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k} = -\vec{j} + 4\vec{k}\end{aligned}$$

$$(b) \quad 3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(2\vec{i} + 2\vec{j}) - 2(-\vec{j} + 4\vec{k}) = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k}$$

(c)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

(d)

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{0}{2\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$$

(e) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 = -2 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu okomiti.

(f) $P = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$P = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{33}$$

(g) $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = \frac{-2}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{34}}{34} \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 1.74(99.87^\circ)$

(h) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 8 & -8 & -2 \end{vmatrix} = 132$

Zadatak 3.7.2. Neka su dane točke $A(2, 0, 6)$, $B(6, -2, 5)$, $C(-6, -3, 0)$ i $D(-3, 0, 6)$.

(a) Kolika je površina paralelograma razapetog vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$.

(b) Jesu li vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ međusobno okomiti?

Rjesenje:

$$\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{CD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$(a) P = \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 27\vec{j} + 18\vec{k}$$

$$P = \sqrt{(-9)^2 + (-27)^2 + 18^2} = 9\sqrt{14} = 33.67$$

$$(b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 12 - 6 - 6 = 0$$

Vektori su okomiti.

3.8 Zadaci za vježbu

Zadatak 3.8.1. Nađite vektor $\overrightarrow{AB}$ ako je

- a) $A(1, 2, 3), B(5, -3, 4)$
- b) $A(-2, 4, 5), B(3, 4, -2)$

Rjesenje:

- a) $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$
- b) $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 7\vec{j}$

Zadatak 3.8.2. Za dane vektore $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

- a) izračunajte duljine vektora $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$
- b) odredite kosinuse smjera vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$
- c) odredite slijedeće vektore

$$2\vec{a} + \vec{b}$$

$$2\vec{a} - 2\vec{b}$$

Rjesenje:

- a) $|\vec{a}| = \sqrt{19}, |\vec{b}| = \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \alpha_1 &= \frac{3\sqrt{19}}{19}, \cos \alpha_2 = \frac{3\sqrt{19}}{19} \cos \alpha_3 = \frac{-\sqrt{19}}{19} \\ \cos \beta_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \beta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \cos \beta_3 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2\vec{a} + \vec{b} &= 7\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k} \\ 2\vec{a} - 2\vec{b} &= 4\vec{i} + 8\vec{j} \end{aligned}$$

Zadatak 3.8.3. Odredite duljinu i kosinus smjera vektora $\vec{a} = 10\vec{i} + 20\vec{j} + 40\vec{k}$.

Rješenje:

$$|\vec{a}| = 10\sqrt{21}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{21}}{21}, \cos \alpha_2 = \frac{2\sqrt{21}}{21} \cos \alpha_3 = \frac{4\sqrt{21}}{21}$$

Zadatak 3.8.4. Zadani su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$. Vektor $\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ rastavite u smjeru vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje:

$$\vec{c} = \frac{6}{5}\vec{a} + \frac{8}{5}\vec{b}$$

Zadatak 3.8.5. Za koje vrijednosti α i β su vektori $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ i $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$ kolinearni.

Rješenje:

$$\alpha = \frac{16}{3}, \beta = \frac{9}{4}$$

Zadatak 3.8.6. Odredite skalarni produkt vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.

Rješenje:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -7$$

Zadatak 3.8.7. Odredite kut između vektora $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ i $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Rješenje:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \alpha = 45^\circ$$

Zadatak 3.8.8. Za koju vrijednost λ su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ i $\vec{b} = \lambda\vec{i} + \vec{j}$ međusobno okomiti.

Rješenje:

$$\lambda = 1$$

Zadatak 3.8.9. Odredite parametar t takav da vektori $\vec{a} = t\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{b} = t\vec{i} - 5t\vec{j} + 3\vec{k}$ budu međusobno okomiti.

Rješenje:

$$t_1 = 3, t_2 = 2$$

Zadatak 3.8.10. Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$. Izračunajte:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$

b) $(3\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{b}$

Rješenje:

a) $\vec{a} \times \vec{b} = 34\vec{i} + 14\vec{j} + 18\vec{k}$

b) $(3\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{b} = 102\vec{i} + 42\vec{j} + 54\vec{k}$

Zadatak 3.8.11. Odredite površinu trokuta ABC s vrhovima $A(3, 2, -3)$, $B(5, 1, -1)$ i $C(1, -1, 1)$.

Rješenje:

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{260}$$

Zadatak 3.8.12. Izračunajte površinu trokuta ABC s vrhovima $A(0, 1, 0)$, $B(2, 2, 2)$ i $C(4, 0, 3)$.

Rješenje:

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{65}$$

Zadatak 3.8.13. Izračunajte površinu paralelograma $ABCD$ s vrhovima $A(2, 1, 0)$, $B(3, 1, 1)$ i $C(-1, 0, 1)$.

Rješenje:

$$P = \sqrt{18}$$

Zadatak 3.8.14. Dokažite da su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{c} = 23 - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ komplanarni.

Rješenje:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

Zadatak 3.8.15. Dokažite da su vektori $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ i $\vec{c} = 11\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ komplanarni.

Rješenje:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

Zadatak 3.8.16. Izračunajte volumen tetraedra čiji su vrhovi $A(1, 1, 2)$, $B(2, 3, -1)$, $C(2, -2, 4)$ i $D(-1, 1, 3)$.

Rješenje:

$$V = \frac{5}{6}$$

Zadatak 3.8.17. Izračunajte volumen tetraedra čiji su vrhovi $A(1, 2, 1)$, $B(2, 0, 3)$, $C(1, 3, -1)$ i $D(2, -1, 3)$.

Rješenje:

$$V = \frac{1}{3}$$

Poglavlje 4

Funkcije

4.1 Pojam funkcije

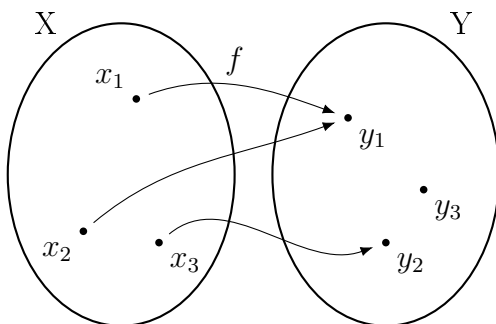
Pojam funkcije spada među osnovne matematičke pojmove i predstavlja pravilo pridruživanja elemenata jednog skupa elementima drugog skupa. Pravilo koje svakom hrvatskom državljaninu pridružuje njegov OIB je primjer jedne funkcije. Primijetimo da svaki hrvatski državljanin ima svoj OIB, tj. ne postoji hrvatski državljanin za kojeg OIB nije definiran. Također, taj OIB je jedinstveno definiran, tj. ne može se dogoditi da jedna osoba ima dva različita OIB-a. Upravo ova dva svojstva su bitna pri definiranju funkcije.

4.1.1 Definicija funkcije

Neka su X i Y neprazni skupovi i f pravilo koje svakom elementu x iz skupa X pridružuje točno jedan element y iz skupa Y . Uređena trojka (X, Y, f) naziva se **funkcija** i označava

$$f : X \rightarrow Y$$

U govoru se često poistovjećuje funkcija s pravilom pridruživanja f . Skup X naziva se **domena** ili **područje definicije** funkcije i označavam s $D(f)$, a skup Y **kodomena** funkcije. S $f(x)$ označava se element skupa Y u kojeg se po pravilu f preslikao x iz X . $f(x)$ još se zove i **slika elementa (zavisna varijabla ili vrijednost funkcije)** x iz X po funkciji f , a element $x \in X$ zove se **nezavisna varijabla ili argument funkcije**.



Skup $\{f(x) \in Y | x \in X\}$ naziva se **slika funkcije** f i označava se $f(X)$. Slika funkcije je općenito različita od kodomene funkcije jer može postojati element u kodomeni u kojeg se nije preslikao niti jedan element iz domene.

Funkcije se najčešće označavaju malim slovima, npr. $f, g, h, \dots$

Funkcije čije su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva nazivaju se realne funkcije realne varijable. Ukoliko je realna funkcija realne varijable f zadana analitički, smatra se da je njena domena onaj podskup skupa $\mathbb{R}$ za koji analitički izraz ima smisla, tj. njena domena je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje je $f(x)$ realan broj.

4.1.2 Jednakost funkcija, restrikcija funkcije, nultočke funkcije

Dvije funkcije $f : X \rightarrow Y$ i $g : X' \rightarrow Y'$ **jednake** ako su ispunjena ova tri uvjeta:

- $X = X'$, odnosno f i g imaju istu domenu
- $Y = Y'$, odnosno f i g imaju istu kodomenu
- $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in X$

Ukoliko jedan od ovih uvjeta nije ispunjen f i g nisu jednake funkcije.

Primjer 4.1.1. Promotrimo funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiranu s $f(x) = x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$ i funkciju $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definiranu s $g(x) = (\sqrt{x})^2$, za svaki $x \in [0, +\infty)$. Iako za svaki pozitivan realan broj $x \in [0, +\infty)$ vrijedi da je $g(x) = (\sqrt{x})^2 = x = f(x)$, funkcije f i g nisu jednake jer je $D(f) \neq D(g)$. Međutim, ako bismo promatrali funkciju f samo na skupu $[0, +\infty)$ onda bi na tom skupu f i g bile jednake. Ta ideja nas dovodi do definicije restrikcije funkcije.

Neka je $f : X \rightarrow Y$ funkcija i neka je $Z \subseteq X$ podskup skupa X . **Restrikcija funkcije** f na skupu Z , u oznaci $f|_Z : Z \rightarrow Y$, je funkcija za koju vrijedi $f|_Z(z) = f(z)$ za svaki $z \in Z$.

Zadatak 4.1.1. Neka su dane funkcije f i g , $f(x) = x + 1$ i $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Jesu li f i g jednake funkcije? Postoji li skup $X \subset \mathbb{R}$ takav da je $f|_X = g$?
Rješenje:

Iz formule razlike kvadrata $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ slijedi $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$.

Dakle, za svaki $x \neq 1$ vrijedi $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x + 1 = f(x)$.

Odnosno, za $X = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$ vrijedi $f|_X = g$.

Funkcije f i g nisu jednake jer za $x = 1$ je $f(1) = 1 + 1 = 2$, dok funkcija g nije definirana u točki 1.

Neka je dana funkcija $f : X \rightarrow Y$, gdje je $Y \subseteq \mathbb{R}$. Točke $x \in X$ za koje vrijedi $f(x) = 0$ zovu se **nultočke** funkcije f .

Zadatak 4.1.2. Neka je $f(x) = x^2 - 4$. Odredite:

- (a) $f(0), f(3), f(-3)$
- (b) $f(1) + f(-1)$
- (c) Nultočke funkcije f .

Rješenje:

- (a) $f(0) = 0^2 - 4 = -4, f(3) = 3^2 - 4 = 5, f(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$
- (b) $f(1) + f(-1) = (1^2 - 4) + ((-1)^2 - 4) = -3 - 3 = -6$
- (c) Traži se x za koje je $x^2 - 4 = 0$.
 $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$.

Zadatak 4.1.3. Neka je $f(x) = \frac{x+5}{x-5}$. Odredite:

- (a) $f(0), f(3), f(-3)$
- (b) $f(1) + f(-1)$
- (c) Nultočke funkcije f .

Rješenje:

- (a) $f(0) = \frac{0+5}{0-5} = \frac{5}{-5} = -1, f(3) = \frac{3+5}{3-5} = \frac{8}{-2} = -4, f(-3) = \frac{-3+5}{-3-5} = \frac{-1+5}{-8} = -\frac{1}{2}$
- (b) $f(1) + f(-1) = \frac{1+5}{1-5} + \frac{-1+5}{-1-5} = \frac{6}{-4} + \frac{4}{-6} = -\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{13}{6}$
- (c) Traži se x za koje je $\frac{x+5}{x-5} = 0$. Množeći obe strane jednadžbe s $(x - 5)$ dobije se:
 $\frac{x+5}{x-5} = 0 \Rightarrow x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$.

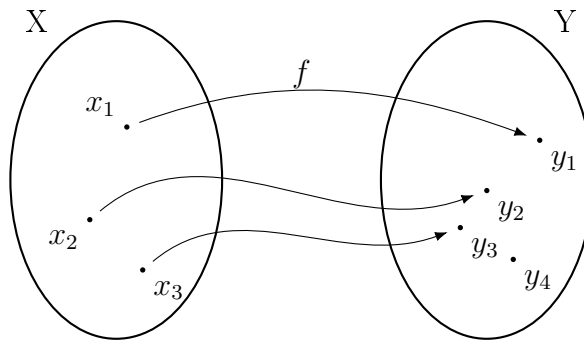
4.1.3 Surjekcija, injekcija i bijekcija

Kod definiranja funkcije dopušta se da različiti elementi iz domene preslikaju u isti element kodomene funkcije. Također, dopušta se da slika funkcije bude pravi podskup kodomene funkcije, odnosno da postoji element iz kodomene u koji se nijedan element domene nije preslikao. U ovom poglavlju definiraju se funkcije za koje prethodne tvrdnje nisu dopuštene.

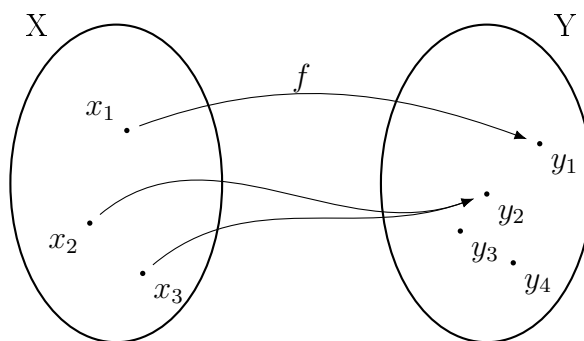
Neka je $f : X \rightarrow Y$ funkcija. Funkcija f je **injekcija** (ili **injektivna funkcija**) ako vrijedi da za svaki $x_1, x_2 \in X$:

$$\text{ako je } f(x_1) = f(x_2) \text{ onda je } x_1 = x_2.$$

Odnosno, svaka dva različita elementa iz X se nužno preslikavaju u različite elemente iz Y .



Primjer injektivne funkcije



Primjer funkcije koja nije injekcija

Zadatak 4.1.4. Jesu li sljedeće funkcije injekcije?

- (a) $f(x) = x^2$
- (b) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$
- (c) $h(x) = x + 5$

Rješenje: Kako bi se pokazalo da funkcija nije injekcija dovoljno je pronaći jedan par različitih točaka domene koje funkcija preslika u isti element kodomene. Ako se želi pokazati da je funkcija injekcija mora se dokazati da za svake dvije točke iz domene, ako su njihove slike jednake, onda su nužno i početne točke jednake.

- (a) Kvadratna funkcija $f(x) = x^2$ brojeve suprotnog predznaka x i $-x$ preslikava u isti broj x^2 . Dakle funkcija $f(x) = x^2$ nije injekcija jer je, naprimjer, $f(1) = 1^2 = 1 = (-1)^2 = f(-1)$.
- (b) Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ proizvoljni elementi domene funkcije g . Neka vrijedi $g(x_1) = g(x_2)$. Iz toga slijedi:

$$\begin{aligned}
 g(x_1) &= g(x_2) \\
 \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} &= \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} \\
 (x_1 + 1)(x_2 - 1) &= (x_2 + 1)(x_1 - 1) \\
 x_1x_2 + x_2 - x_1 - 1 &= x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1 \\
 x_2 - x_1 &= -x_2 + x_1 \\
 2x_2 &= 2x_1 \\
 x_2 &= x_1
 \end{aligned}$$

Dakle, funkcija g je injekcija.

- (c) Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ proizvoljni elementi domene funkcije h . Neka vrijedi $h(x_1) = h(x_2)$. Iz toga slijedi:

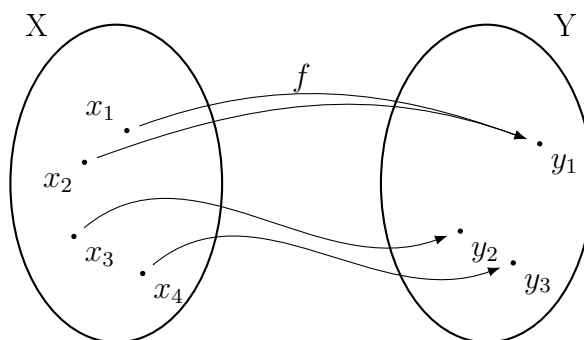
$$\begin{aligned}
 h(x_1) &= h(x_2) \\
 x_1 + 5 &= x_2 + 5 \\
 x_1 &= x_2
 \end{aligned}$$

Dakle, funkcija h je injekcija.

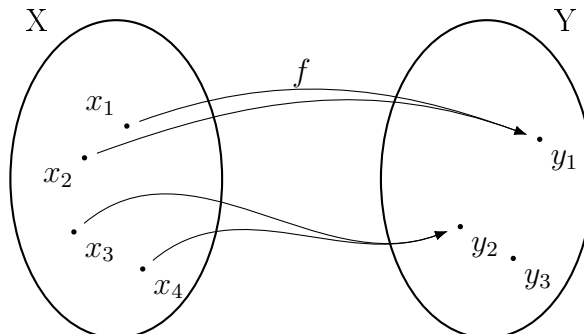
Neka je $f : X \rightarrow Y$ funkcija. Funkcija f **surjekcija** (ili **surjektivna funkcija**) ako za svaki $y \in Y$:

postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$.

Odnosno, svaki element iz kodomene ima element u domeni koji se u njega preslikao. Kod surjektivnih funkcija slika funkcije i njena kodomena su isti skup.



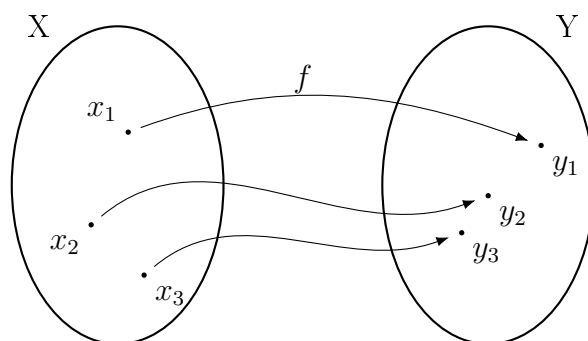
Primjer surjektivne funkcije



Primjer funkcije koja nije surjekcija

Napomena 4.1.1. Ako funkcija $f : X \rightarrow Y$ nije surjekcija lako se definira funkcija $f' : X \rightarrow f(X)$ s $f'(x) = f(x)$ za svaki $x \in X$ koja jest surjekcija, a ima isto pravilo pridruživanja kao i početna funkcija f .

Funkcija koja je i injekcija i surjekcija zove se **bijekcija** (ili **bijektivna funkcija**).



Primjer bijekcije

4.1.4 Operacije s funkcijama

Neka su $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ realne funkcije, te neka je r realan broj. Tada se definiraju nove funkcije $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $r \cdot f$ na skupu X :

- $f \pm g : X \rightarrow \mathbb{R}, (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g} : X \setminus \{x \in X | g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}, (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $r \cdot f : X \rightarrow \mathbb{R}, (r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$

4.2 Svojstva funkcije

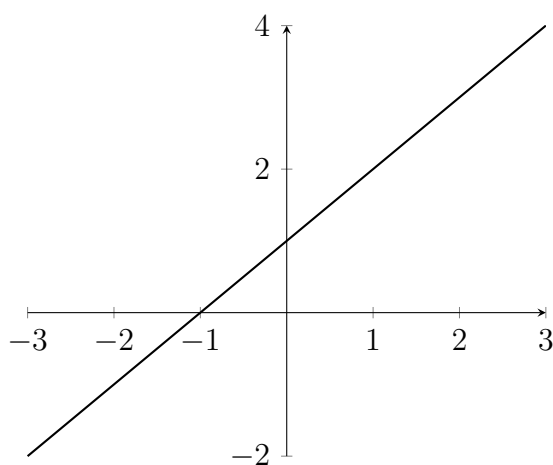
4.2.1 Monotonost funkcije

Kaže se da je funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ **rastuća** na skupu $I \subseteq X$ ako za svaki $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Kaže se da je funkcija f **strogo rastuća** na skupu I ako za svaki $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$



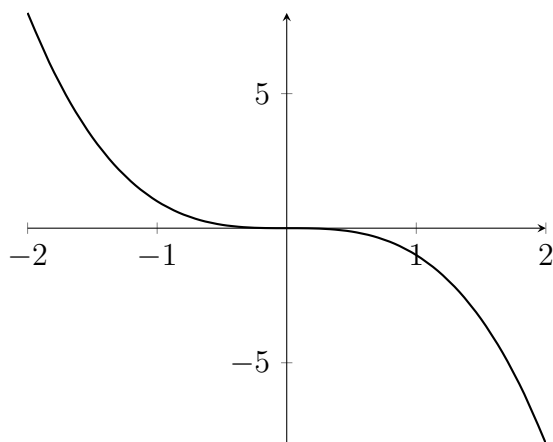
Primjer (strogo) rastuće funkcije

Kaže se da je funkcija f **padajuća** na skupu I ako za svaki $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Kaže se da je funkcija f **strogo padajuća** na skupu I ako za svaki $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

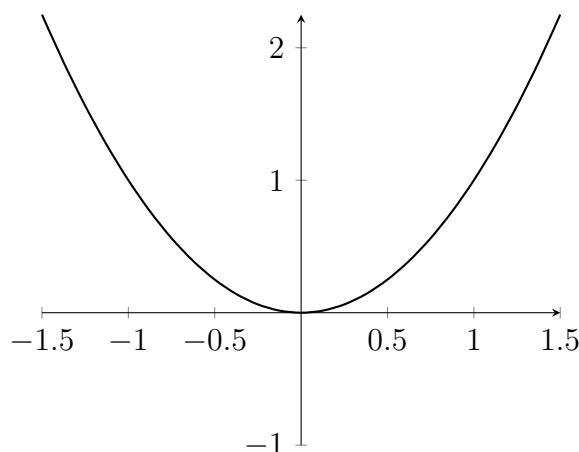
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$



Primjer (strogo) padajuće funkcije

Ako je funkcija f rastuća na cijeloj svojoj domeni, onda je f **rastuća funkcija**. Ako je funkcija f padajuća na cijeloj svojoj domeni, onda je f **padajuća funkcija**.

Primjer 4.2.1. Funkcija $f(x) = x^2$ je padajuća na skupu $\langle -\infty, 0]$ i rastuća na skupu $[0, +\infty)$



4.2.2 Ekstremi funkcije

Funkcija $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ ima **lokalni maksimum** u točki $x_0 \in X$ ako postoji interval $\langle a, b \rangle$ takav da je $x_0 \in \langle a, b \rangle$ i da vrijedi:

$$f(x_0) \geq f(x), \text{ za svaki } x \in \langle a, b \rangle.$$

Funkcija $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ ima **lokalni minimum** u točki $x_0 \in X$ ako postoji interval $\langle a, b \rangle$ takav da je $x_0 \in \langle a, b \rangle$ i da vrijedi:

$$f(x_0) \leq f(x), \text{ za svaki } x \in \langle a, b \rangle.$$

Točke lokalnog maksimuma i lokalnog minimuma zajedno se nazivaju **lokalni ekstremi**.

Funkcija $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ ima **globalni maksimum** u točki $x_0 \in X$ ako za svaki $x \in X$ vrijedi:

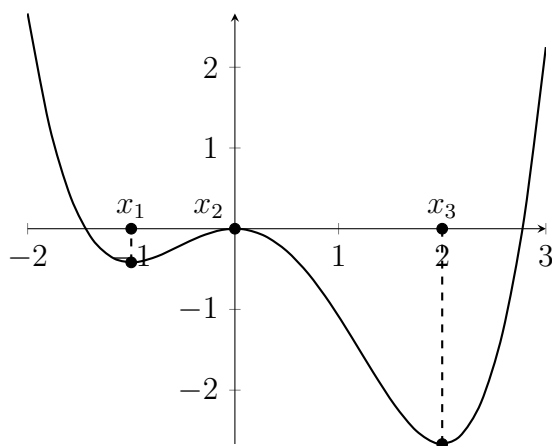
$$f(x_0) \geq f(x).$$

Funkcija $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ ima **globalni minimum** u točki $x_0 \in X$ ako za svaki $x \in X$ vrijedi:

$$f(x_0) \leq f(x).$$

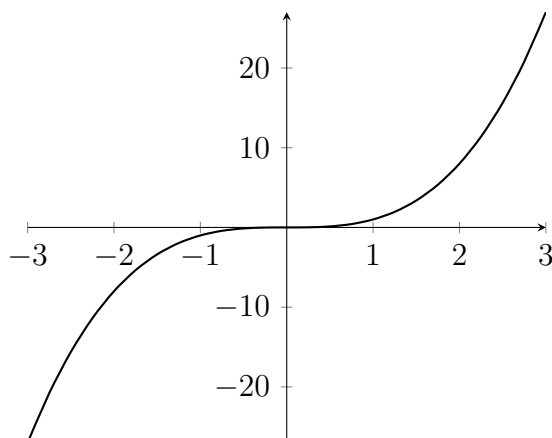
Točke globalnog maksimuma i globalnog minimuma zajedno se nazivaju **globalni ekstremi**.

Primjer 4.2.2. Funkcija $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$ ima lokalne minime u točkama $x_1 = -1$ i $x_3 = 2$, te lokalni maksimum u točki $x_2 = 0$. Funkcija ima globalni minimum u točki $x_3 = 2$, ali nema globalnog maksimuma.

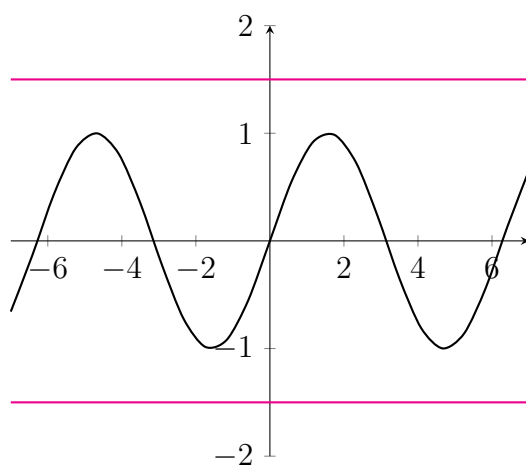


4.2.3 Omeđenost funkcije

Funkcija $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ je **omeđena odozgo** ako postoji realan broj M takav da je $f(x) \leq M$ za svaki $x \in X$. Funkcija $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ je **omeđena odozdo** ako postoji realan broj m takav da je $f(x) \geq m$ za svaki $x \in X$. Funkcija je **omeđena** ako je omeđena odozgo i odozdo. U protivnom se kaže da je funkcija **neomeđena**.



Funkcija $f(x) = x^3$ je neomeđena.

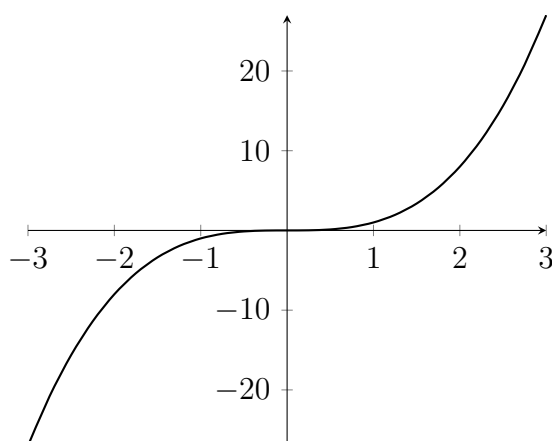


Funkcija $f(x) = \sin(x)$ je omeđena.

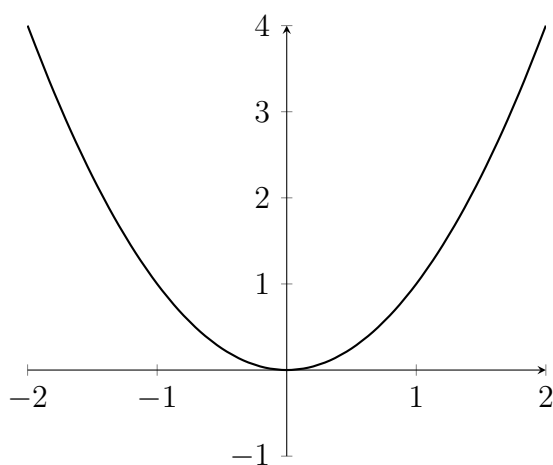
4.2.4 Parnost funkcije

Funkcija $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ je **parna** ako je $f(-x) = f(x)$ za svaki $x \in X$. Funkcija $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ je **neparna** ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x \in X$.

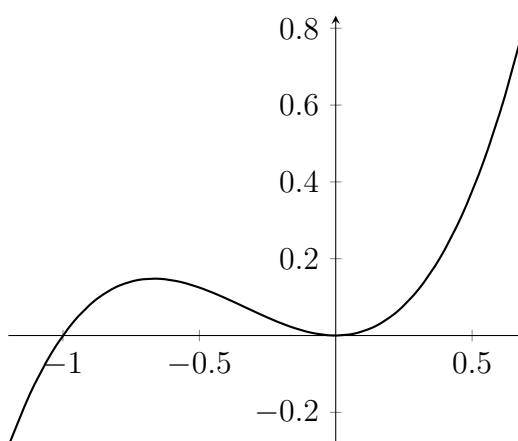
Napomena 4.2.1. Graf parne funkcije je simetričan obzirom na os y , a graf neparne funkcije je simetričan obzirom na ishodište.



Funkcija $f(x) = x^3$ je neparna.



Funkcija $f(x) = x^2$ je parna.



Funkcija $f(x) = x^3 + x^2$ nije ni parna ni neparna.

Zadatak 4.2.1. Ispitajte paritet funkcija:

- (a) $f(x) = 5$
- (b) $f(x) = (x - 1)^2$
- (c) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x} + \sin x$

Rješenje:

- (a) $f(x) = 5$
 $f(-x) = 5 = f(x)$
 Funkcija f je parna funkcija.

(b) $f(x) = (x - 1)^2$

$$f(-x) = (-x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$-f(x) = -(x - 1)^2 = -x^2 + 2x - 1$$

Funkcija f nije ni parna ni neparna funkcija.

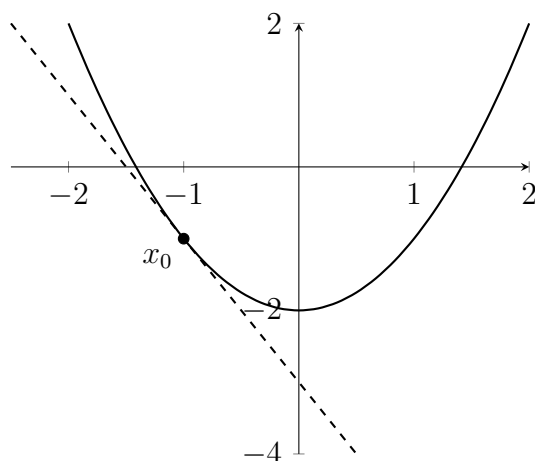
(c) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x} + \sin x$

$$f(-x) = (-x)^2 \sqrt[3]{-x} + \sin(-x) = -x^2 \sqrt[3]{x} - \sin x = -(x^2 \sqrt[3]{x} + \sin x) = -f(x)$$

Funkcija f je neparna funkcija.

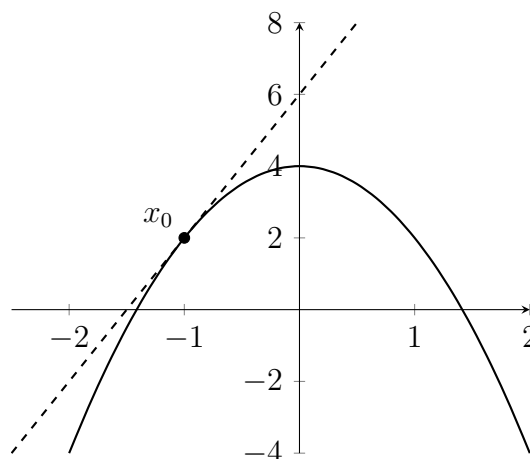
4.2.5 Konveksnost i konkavnost funkcije

Pojmovi konveksnosti i konkavnosti definirat će se grafički. Neka je $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ realna funkcija realne varijable i $x_0 \in X$ točka u domeni funkcije f . Funkcija f je **konveksna u točki** x_0 ako se tangenta na graf funkcije f u točki x_0 nalazi ispod grafa funkcije. Funkcija f je **konveksna na intervalu** $\langle a, b \rangle \subseteq X$, ako je konveksna u svakoj točki tog intervala.



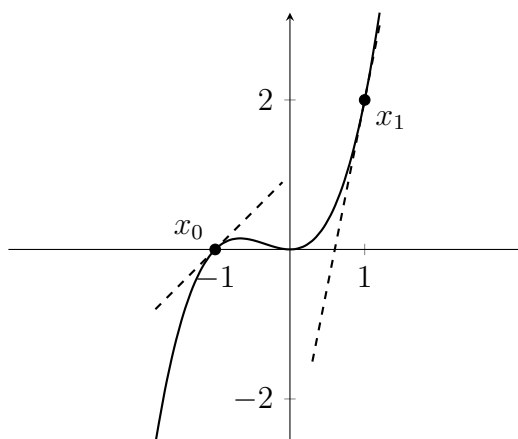
Funkcija $f(x) = x^2 - 2$ je konveksna na cijeloj domeni.

Funkcija f je **konkavna u točki** x_0 ako se tangenta na graf funkcije f u točki x_0 nalazi iznad grafa funkcije. Funkcija f je **konkavna na intervalu** $\langle a, b \rangle \subseteq X$, ako je konkavna u svakoj točki tog intervala.



Funkcija $f(x) = -2x^2 + 2$ je konkavna na cijeloj domeni.

Funkcija može biti konkavna na jednom dijelu, a konveksna na drugom dijelu domene.



Funkcija $f(x) = x^3 + x^2$ je konkavna na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$ i konveksna na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$.

Točka u kojoj funkcija prelazi iz konkavnosti u konveksnost ili obratno, naziva se **točka infleksije**. U gornjem primjeru, točka infleksije funkcije $f(x) = x^3 + x^2$ je 0.

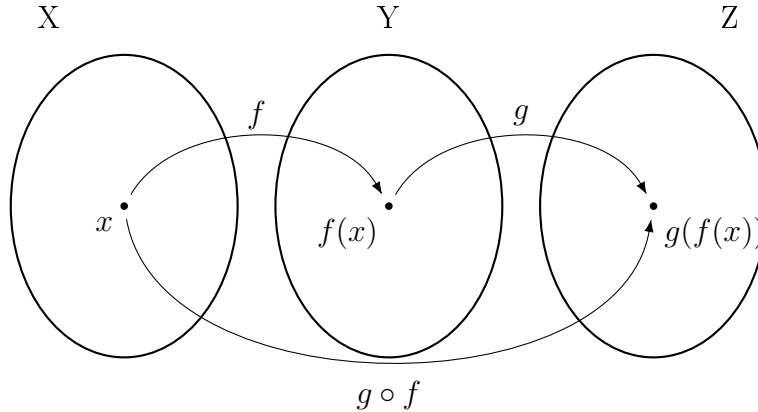
4.3 Kompozicija funkcija

Neka su X, Y i Z neprazni skupovi, i $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$ funkcije. **Kompozicija funkcija** f i g u oznaci $g \circ f$ je funkcija $g \circ f : X \rightarrow Z$ za

koju vrijedi:

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Napomena 4.3.1. Općenito vrijedi $f \circ g \neq g \circ f$, odnosno komponiranje funkcija nije komutativno.



Zadatak 4.3.1. Za zadane funkcije f i g odredite kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$.

- (a) $f(x) = x + 5$, $g(x) = \frac{x}{2}$
- (b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 3$
- (c) $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2$
- (d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x-1}{2x+3} - 2$

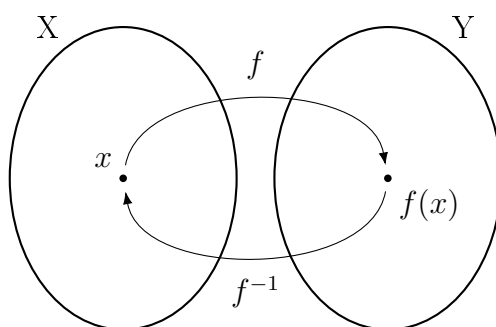
Rješenje:

- (a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + 5 = \frac{x+10}{2}$
 $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+5) = \frac{x+5}{2}$
- (b) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2$
 $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3$
- (c) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2^{x^2}$
 $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x}$
- (d) $f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\frac{x-1}{2x+3} - 2} = \frac{1}{\frac{x-1-2(2x+3)}{2x+3}} = \frac{2x+3}{x-1-4x-6} = \frac{2x+3}{-3x-7}$
 $g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{\frac{1}{x}-1}{2\frac{1}{x}+3} - 2 = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{2+3x}{x}} - 2 = \frac{1-x}{2+3x} - 2 = \frac{1-x-2(2+3x)}{2+3x} = \frac{-3-7x}{2+3x}$

4.4 Inverz funkcije

Neka je $f : X \rightarrow Y$ bijekcija. Kako je f surjekcija, to za svaki $y \in Y$ postoji neki $x \in X$ takav da je $f(x) = y$. Injektivnost funkcije f garantira da je taj x jedinstven za svaki y . Dakle, dobro je definirana funkcija $g : Y \rightarrow X$ s $g(y) = x$, gdje je $x \in X$ jedinstveni element iz X za koji vrijedi $f(x) = y$. Ova funkcija naziva se **inverzom funkcije** f i označava f^{-1} . Vrijedi:

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(y) &= y \text{ za svaki } y \in Y, \\ f^{-1} \circ f(x) &= x \text{ za svaki } x \in X. \end{aligned}$$



Napomena 4.4.1. Kompozicija funkcije i njenog inverza je identiteta.

Zadatak 4.4.1. Odredite inverz zadane funkcije f :

- (a) $f(x) = x + 5$
- (b) $f(x) = x^3 + 1$
- (c) $f(x) = \log x$
- (d) $f(x) = \log x + 1$

Rješenje:

- (a) $f(x) = x + 5$
 $y = x + 5$
 $-x = -y + 5$
 $x = y - 5$
 $f^{-1}(x) = x - 5$
- (b) $f(x) = x^3 + 1$
 $y = x^3 + 1$
 $x^3 = y - 1$
 $x = \sqrt[3]{y - 1}$
 $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad f(x) &= \log x \\ f^{-1}(x) &= 10^x \end{aligned}$$

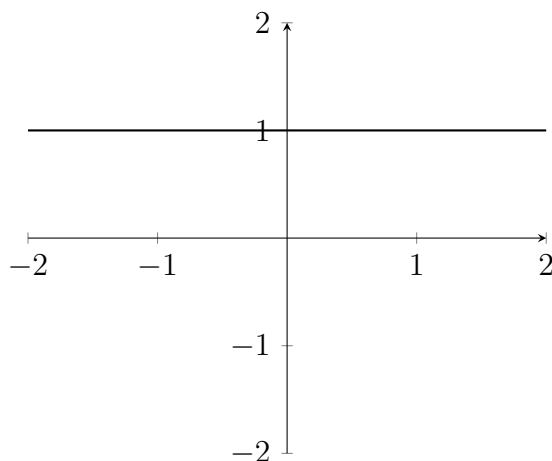
$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad f(x) &= \log x + 1 \\ y &= \log x + 1 \\ y - 1 &= \log x \\ 10^{y-1} &= x \\ f^{-1}(x) &= 10^{x-1} = \frac{10^x}{10} \end{aligned}$$

4.5 Elementarne funkcije

U ovom poglavlju proučit će se neka osnovna svojstva elementarnih funkcija. Elementarne funkcije dijele se na algebarske i transcendentne funkcije.

4.5.1 Algebarske funkcije

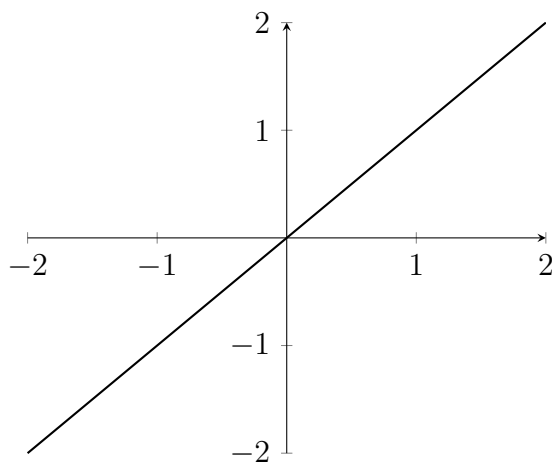
Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definira s $f(x) = a$ gdje je $a \in \mathbb{R}$ realan broj, naziva se **konstanta**.



Graf konstante $f(x) = 1$.

Napomena 4.5.1. Graf konstante je paralelan s osi x .

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definira s $f(x) = x$ naziva se **identiteta**.



Graf identitete

Funkcije koje se dobivaju s konačno mnogo algebarskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, potenciranje cijelim ili razlomljenim eksponentom) primijenjenih na konstantu $f(x) = 1$ i identitetu $f(x) = x$ nazivaju se **algebarske funkcije**. Algebarske funkcije dijele se na:

1. Polinome
2. Racionalne funkcije
3. Iracionalne funkcije

Polinomi

Polinom n -tog stupnja je funkcija $P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oblika:

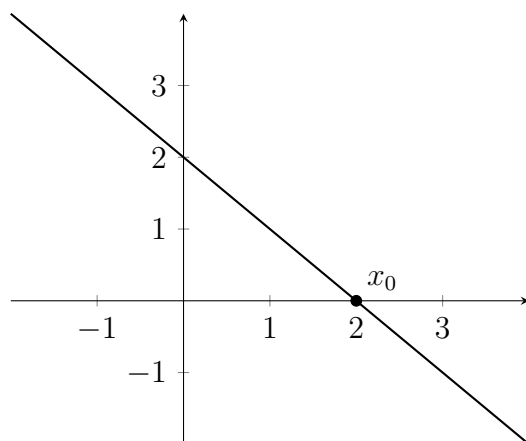
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

gdje su $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ **koeficijenti** polinoma, $n \in \mathbb{Z}^+$ i $a_n \neq 0$. a_n zove se **vodeći koeficijent**, a a_0 **slobodni koeficijent** polinoma.

Konstanta je polinom nultog stupnja, a identiteta je polinom prvog stupnja. Specijalan slučaj polinoma n -tog stupnja je potencija n -tog stupnja, tj. funkcija oblika $f(x) = ax^n$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Kad je n paran broj, potencija n -tog stupnja je parna funkcija, a kad je n neparan broj, potencija n -tog stupnja je neparna funkcija.

Funkcija oblika $P_1(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ je polinom prvog stupnja. Takva funkcija zove se **linearna funkcija**. Graf linearne funkcije je pravac. Koeficijent a određuje smjer pravca i zove se **koeficijent smjera**. Ukoliko je $a < 0$ pravac je padajući, a ukoliko je $a > 0$ pravac je rastući. Linearna

funkcija uvijek ima točno jednu nultočku. Ta nultočka nalazi se rješavajući jednadžbu $ax + b = 0$. Dakle, nultočka linearne funkcije je $x_0 = -\frac{b}{a}$.



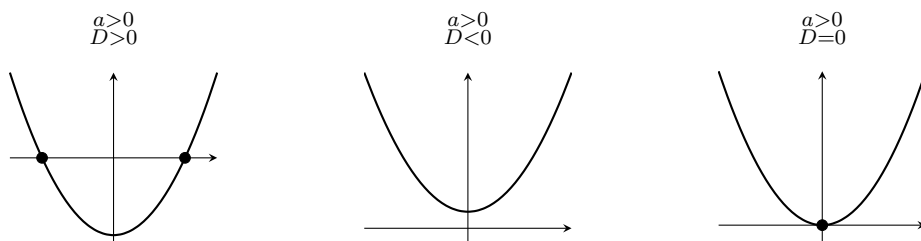
Graf linearne funkcije $f(x) = -x + 2$

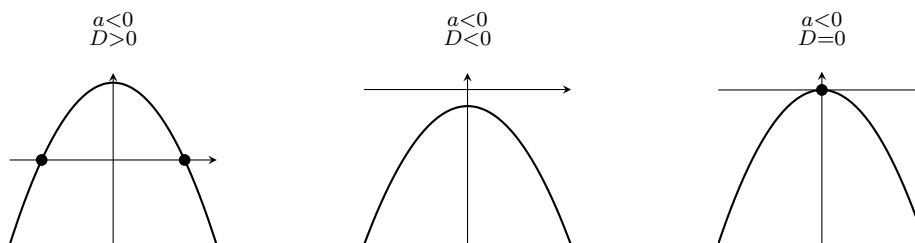
Funkcija oblika $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ zove se **kvadratna funkcija**. Graf kvadratne funkcije je parabola. Ako postoje, nultočke parabole računaju se po formuli:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Izraz pod korijenom: $b^2 - 4ac$ naziva se **diskriminanta** kvadratne funkcije i označava s D . Postojanje realnih nultočaka kvadratne funkcije ovisi o predznaku diskriminante. Ako je $D > 0$, onda će kvadratna funkcija imati dvije različite realne nultočke. Ako je $D = 0$, onda kvadratna funkcija ima jednu, tzv. dvostruku, nultočku. U toj točki graf funkcije dodiruje os x . Ako je $D < 0$, onda ne postoji rješenje izraza $\sqrt{D} = \sqrt{b^2 - 4ac}$ u skupu realnih brojeva, pa kvadratna funkcija nema realnih nultočaka.

Oblik parabole ovisi o predznaku vodećeg koeficijenta a . Ukoliko je $a > 0$, graf kvadratne funkcije bit će otvoren prema gore, a ako je $a < 0$, onda će graf kvadratne funkcije biti otvoren prema dolje.





Tjeme parabole $T(x_T, y_T)$ je točka u kojoj parabola dostiže maksimum, ako je okrenuta prema dolje, odnosno minimum ako je okrenuta prema gore. Ukoliko parabola ima dvije realne različite nultočke, x-koordinata tjemena nalazi se na pola puta između nultočaka. U tom slučaju x-koordinata tjemena se može naći pomoću formule

$$x_T = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Koristeći formulu za nultočke parabole:

$$x_T = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

Vrijedi da je $y_T = f(x_T)$, pa je:

$$y_T = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\frac{-b}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$T(x_T, y_T) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Formule za izračun koordinata tjemena mogu se koristiti i u slučaju kad parabola nema dvije različite realne nultočke.

Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ gdje je $a > 0$, je padajuća na intervalu $\langle -\infty, x_T \rangle$ i rastuća na intervalu $\langle x_T, +\infty \rangle$. Takva funkcija je omeđena odozdo jer za y_T vrijedi da je $f(x) \geq y_T$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ gdje je $a < 0$, je rastuća na intervalu $\langle -\infty, x_T \rangle$ i padajuća na intervalu $\langle x_T, +\infty \rangle$. Takva funkcija je omeđena odozgo jer za y_T vrijedi da je $f(x) \leq y_T$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Za izračun nultočaka polinoma $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ne postoji eksplicitna formula. Međutim, ako su nam nultočke polinoma poznate onda ga možemo faktorizirati na sljedeći način:

- Ako su $x_1, x_2, \dots, x_n$ različite jednostruke realne nultočke polinoma P_n onda je

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

- Ako su $x_1, x_2, \dots, x_p$ različite realne nultočke polinoma P_n gdje je k_i kratnost nultočke x_i onda je

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_p)^{k_p}$$

Dva polinoma $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ i $Q_m(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$ su jednaka ako vrijedi $m = n$ i $a_i = b_i$, za svaki $i = 1, \dots, n$.

Racionalne funkcije

Racionalne funkcije su funkcije oblika:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinom stupnja n i m . Ako je $n < m$, $f(x)$ zove se **prava racionalna funkcija**, a ako je $n \geq m$, $f(x)$ zove se **neprava racionalna funkcija**. Razlog zašto se ovakve funkcije nazivaju nepravim racionalnim funkcijama je taj što se nepravu racionalnu funkciju može zapisati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije. Kod definiranja polinoma nije bilo nikakvih ograničenja u domeni funkcije. Kod racionalnih funkcija nultočke polinoma u nazivniku ne mogu biti dio domene racionalne funkcije jer dijeljenje s nulom nije definirano.

Pri provođenju računa s racionalnim funkcijama $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ponekad se račun pojednostavnjuje ukoliko se racionalna funkcija može zapisati kao zbroj jednostavnijih racionalnih funkcija gdje stupnjevi polinoma u brojniku i nazivniku na premašuju 2. Taj postupak naziva se rastavljanje racionalne funkcije na parcijalne razlomke. Neka je $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ prava racionalna funkcija i $Q_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)$. Tada se f može prikazati u obliku:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_2)} + \cdots + \frac{A_m}{(x - x_m)}.$$

$A_1, A_2, \dots, A_m$ su konstante koje određujemo množeći gornji jednadžbu s $(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)$.

Primjer 4.5.1. Rastav racionalne funkcije $f(x) = \frac{x+8}{x^2+x-6}$ na parcijalne razlomke.

U prvom koraku potrebno je faktorizirati nazivnik $x^2 + x - 6$ koristeći formulu za izračun nultočaka kvadratne funkcije i činjenice da se polinom

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

može faktorizirati kao

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

ako su poznate nultočke $x_1, \dots, x_n$.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -3$$

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x - (-3)) = (x - 2)(x + 3)$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x + 8}{x^2 + x - 6} \\ \frac{x + 8}{(x - 2)(x + 3)} &= \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{x + 3} \quad \backslash \cdot (x - 2)(x + 3) \\ x + 8 &= A_1(x + 3) + A_2(x - 2) \\ x + 8 &= A_1x + 3A_1 + A_2x - 2A_2 \\ x + 8 &= (A_1 + A_2)x + 3A_1 - 2A_2 \end{aligned}$$

Izrazi s desne i lijeve strane su polinomi. Jednakost polinoma podrazumjeva jednakost svih odgovarajućih koeficijenata, tj. iz gornje jednadžbe slijedi:

$$A_1 + A_2 = 1$$

$$3A_1 - 2A_2 = 8$$

Rješavajući ovaj sustav linearnih jednadžbi dobijemo rješenje $A_1 = 2, A_2 = -1$. Dakle, vrijedi:

$$f(x) = \frac{x + 8}{x^2 + x - 6} = \frac{2}{x - 2} - \frac{1}{x + 3}.$$

Ako se u faktorizaciji nazivnika $Q_m(x)$ racionalne funkcije $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ neki faktori pojavljuju na potenciju veću od 1, $Q_m(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_p)^{k_p}$ rastav racionalne funkcije $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ izgleda:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1^1}{(x - x_1)} + \frac{A_2^1}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}^1}{(x - x_1)^{k_1}} + \\ &+ \frac{A_1^2}{(x - x_2)} + \frac{A_2^2}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{k_2}^2}{(x - x_2)^{k_2}} + \cdots + \\ &+ \frac{A_1^p}{(x - x_p)} + \frac{A_2^p}{(x - x_p)^2} + \cdots + \frac{A_{k_p}^p}{(x - x_p)^{k_p}}, \end{aligned}$$

gdje su A_j^i , $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, k_i$ su konstante koje određujemo množeći gornji jednadžbu s $(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_p)^{k_p}$.

Primjer 4.5.2. Rastav racionalne funkcije $f(x) = \frac{x+8}{x^3-4x^2+4x}$ na parcijalne razlomke.

U prvom koraku potrebno je faktorizirati nazivnik $x^3 - 4x^2 + 4x$. Izlučivanjem x dobije se $x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4)$. Koristeći formulu kvadrata razlike $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ dobiva se $x(x^2 - 4x + 4) = x(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) = x(x-2)^2$.

Dakle,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+y}{x^3-4x^2+4x} \\ \frac{x+8}{x(x-2)^2} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{(x-2)^2} \quad \backslash \cdot x(x-2)^2 \\ x+8 &= A_1(x-2)^2 + A_2x(x-2) + A_3x \\ x+8 &= A_1(x^2-4x+4) + A_2(x^2-2x) + A_3x \\ x+8 &= A_1x^2 - 4A_1x + 4A_1 + A_2x^2 - 2A_2x + A_3x \\ x+8 &= (A_1+A_2)x^2 + (-4A_1-2A_2+A_3)x + 4A_1 \end{aligned}$$

Izrazi s desne i lijeve strane su polinomi. Jednakost polinoma podrazumijeva jednakost svih odgovarajućih koeficijenata, tj. iz gornje jednadžbe slijedi:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ -4A_1 - 2A_2 + A_3 &= 1 \\ 4A_1 &= 8 \end{aligned}$$

Rješavajući ovaj sustav linearnih jednadžbi dobije se rješenje $A_1 = 2$, $A_2 = -2$, $A_3 = 5$. Dakle, vrijedi:

$$f(x) = \frac{x+8}{x^3-4x^2+4x} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}.$$

Iracionalne funkcije

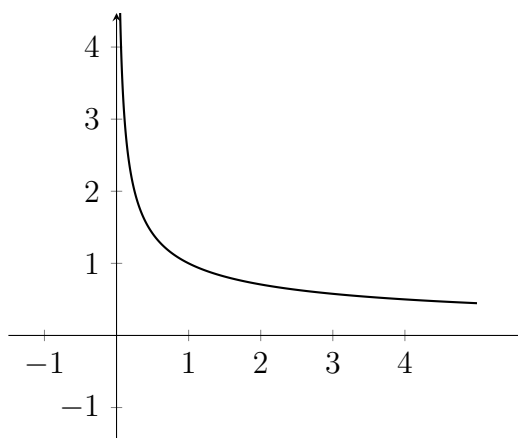
Racionalne funkcije moguće je dobiti primjenjivanjem konačno mnogo racionalnih operacija (zbiranje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) na funkcije konstante i identitete. Ukoliko se tim operacijama pridruži i korjenovanje dobivaju se **iracionalne funkcije**. Neki primjeri iracionalnih funkcija su:

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

- $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+8}}{\sqrt[5]{x^3-4x^2+4x}}$
- $f(x) = \frac{x-\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{5x+5}}$

Kod uzimanja parnih korijena treba se voditi računa o tome da izraz pod korijenom ne smije biti negativan. Ta činjenica predstavlja ograničenja domene iracionalnih funkcija koje koriste parne korijene.

Primjer 4.5.3. Funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ definirana je samo za $x \in \langle 0, +\infty \rangle$.



4.5.2 Transcendentne funkcije

Funkcije koje nisu algebarske zovu se **transcendentne funkcije**. Najpoznatije transcendentne funkcije su:

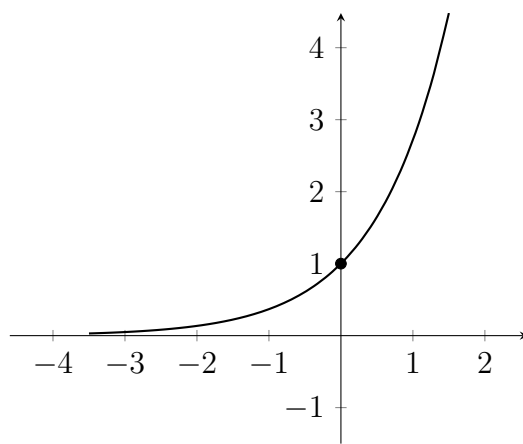
- Eksponencijalna funkcija
- Logaritamska funkcija
- Trigonometrijske funkcije
- Ciklometrijske funkcije

Eksponencijalna funkcija

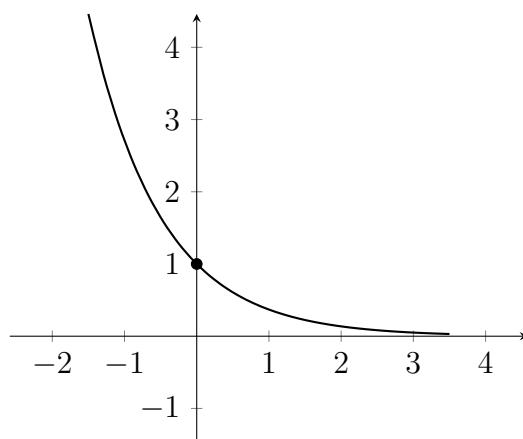
Za $a > 0, a \neq 1$ definira se **eksponencijalna funkcija** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ oblika $f(x) = a^x$. Broj a zove se baza eksponencijalne funkcije. Osnovna svojstva eksponencijalne funkcije su:

- $a^x > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^0 = 1$
- Ako je $a > 1$ onda za $x < y$ vrijedi $a^x < a^y$ tj. eksponencijalna funkcija je rastuća.



- Ako je $a \in \langle 0, 1 \rangle$ onda za $x < y$ vrijedi $a^x > a^y$ tj. eksponencijalna funkcija je padajuća.

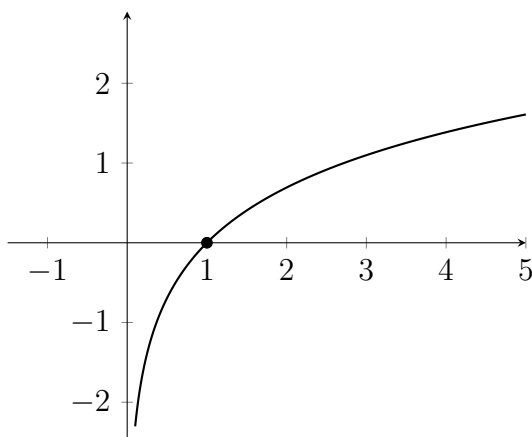


Graf eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$ prolazi točkom $(0, 1)$ za svaku bazu a . Posebno, ako je a jednako Eulerovoj konstanti $e \approx 2.71828$ eksponencijalnu funkciju $f(x) = e^x$ naziva se **prirodna eksponencijalna funkcija**.

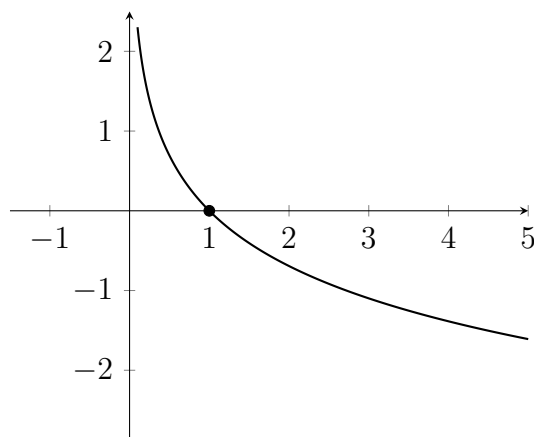
Logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija je inverz eksponencijalne funkcije. Dakle, za eksponencijalnu funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ njena inverzna funkcija $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ zove se logaritamska funkcija $f^{-1}(x) = \log_a x$ s bazom a . Osnovna svojstva logaritamske funkcije su:

- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- Ako je $a > 1$ onda za $x < y$ vrijedi $\log_a x < \log_a y$ tj. logaritamska funkcija je rastuća.



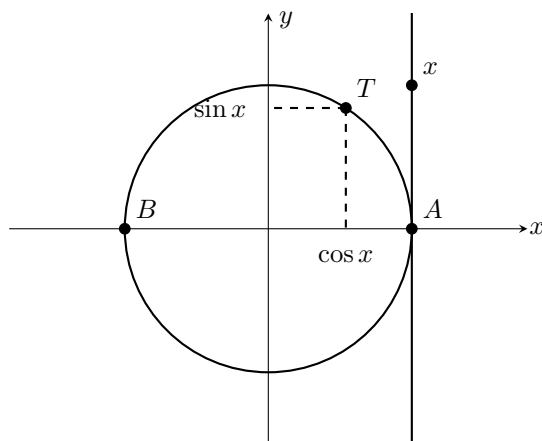
- Ako je $a \in \langle 0, 1 \rangle$ onda za $x < y$ vrijedi $\log_a x > \log_a y$ tj. logaritamska funkcija je padajuća.



Graf logaritamske funkcije $f(x) = \log_a x$ prolazi točkom $(1, 0)$ za svaku bazu a . Odnosno 1 je nultočka svake logaritamske funkcije. Posebno, ako je a jednako Eulerovoj konstanti $e \approx 2.71828$ logaritamska funkcija $f(x) = \log_e x$ naziva se prirodna logaritamska funkcija i označava $\ln x$.

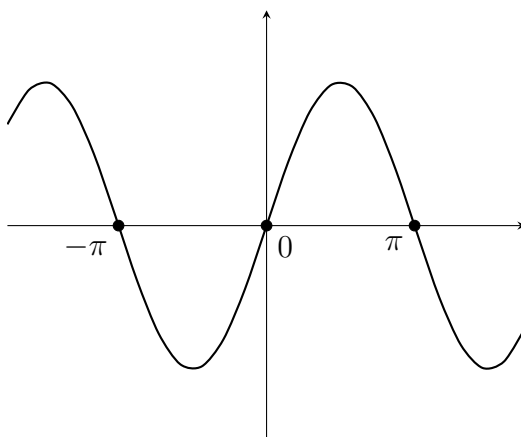
Trigonometrijske funkcije

U Kartezijev koordinatni sustav smjesti se kružnica zadanu jednadžbom $x^2 + y^2 = 1$ i brojevni pravac paralelan s y -osi u točku $A(1, 0)$. Namatanjem pravca na kružnicu u geometrijski pozitivnom smjeru (obrnutom od smjera kretanja kazaljke na satu) pridružuje se svakom realnom broju x jedinstvena točka T na kružnici. Npr. broju 0 pridružena je točka A , a broju π točka B . Takva kružnica naziva se **brojevn**a ili **trigonometrijska kružnica**.

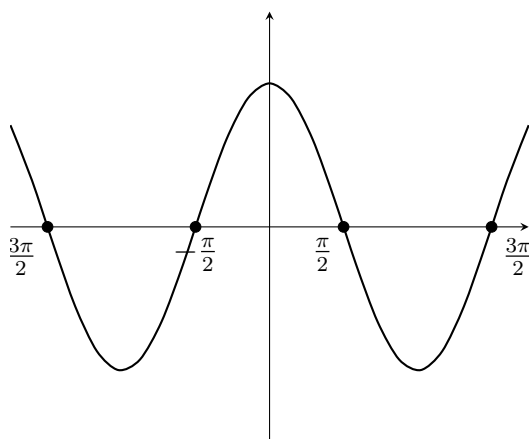


Ordinata točke T je $\sin x$, a apscisa $\cos x$ tj. $T(\cos x, \sin x)$. Tim postupkom svakom realnom broju x pridruženi su potpuno određeni brojevi $\cos x$ i $\sin x$. Odnosno definirane su funkcije:

- Sinus funkcija $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

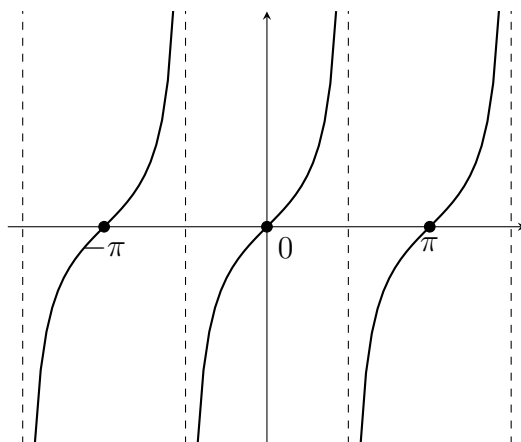


- Kosinus funkcija $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

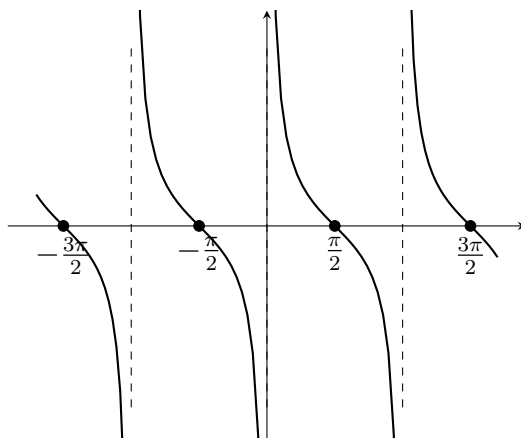


Koristeći funkcije $\sin$ i $\cos$ definiramo funkcije:

- Tangens funkcija $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$



- Kotangens funkcija $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$



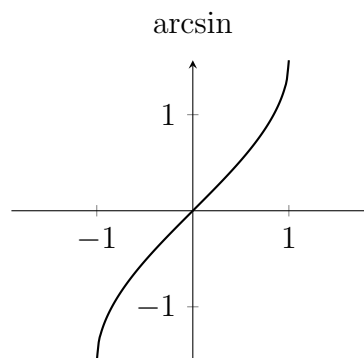
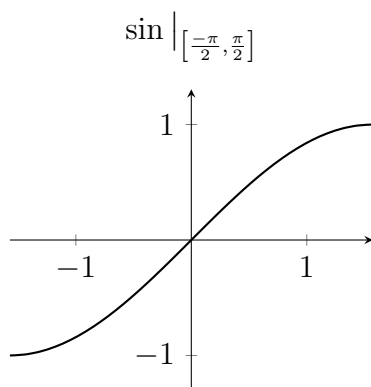
Funkcije $\sin x$, $\cos x$, $tg x$ i $ctgx$ zovu se trigonometrijske funkcije i za njih vrijedi:

	$\sin$	$\cos$	tg	ctg
Domena	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi k \in \mathbb{Z}\}$
Slika	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Nultočke	$k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
Parnost	neparna	parna	neparna	parna

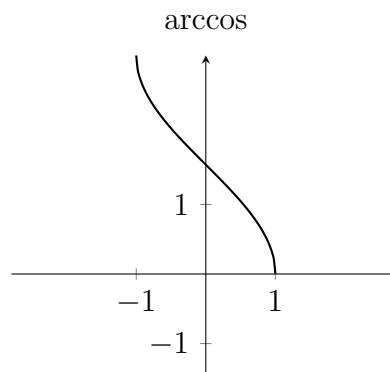
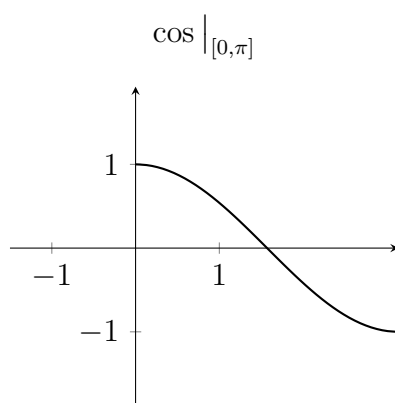
Ciklometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije nisu bijektivne, pa općenito kao takve ne mogu imati inverzne funkcije. Ipak, ako se pogledaju restrikcije trigonometrijskih funkcija koje su bijektivne funkcije, mogu se definirati njihove inverzne funkcije, odnosno **arkus** ili **ciklometrijske funkcije**.

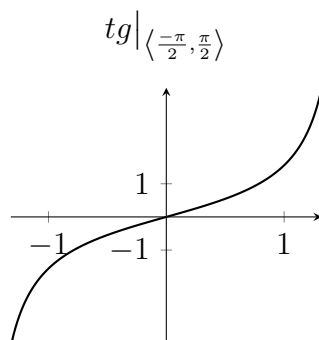
- Funkcija $\sin \left|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ je strogo rastuća bijekcija. Njena inverzna funkcija je $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definirana s $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$.

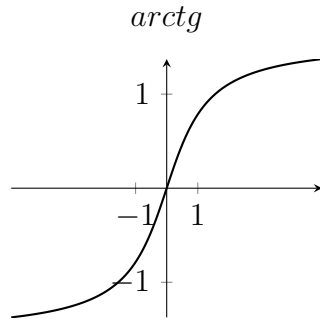


- Funkcija $\cos \left|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ je strogo padajuća bijekcija. Njena inverzna funkcija je $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ definirana s $\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$.

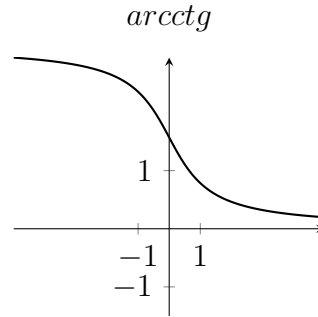
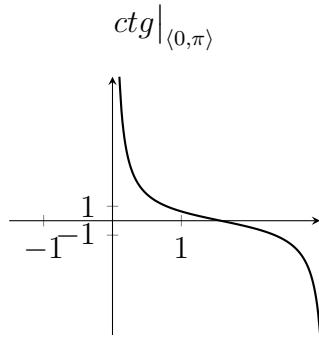


- Funkcija $\operatorname{tg} \left|_{\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle} : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je strogo rastuća bijekcija. Njena inverzna funkcija je $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ definirana s $\operatorname{arctg}(x) = \operatorname{tg}^{-1}(x)$.





- Funkcija $ctg|_{\langle 0, \pi \rangle} : \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je strogo padajuća bijekcija. Njena inverzna funkcija je $arcctg : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, \pi \rangle$ definirana s $arcctg(x) = ctg^{-1}(x)$.



4.6 Prirodno područje definicije funkcije

U uvodnom poglavlju naglašeno je da ako je realna funkcija realne varijable f zadana analitički, smatra se da je njena domena onaj podskup skupa $\mathbb{R}$ za koji analitički izraz ima smisla, tj. njena prirodna domena ili prirodno područje definicije je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje je $f(x)$ realan broj. U prethodnom poglavlju navedene su domene elementarnih funkcija. Ukoliko je funkcija f dobivena kompozicijom elementarnih funkcija njeno prirodno područje definicije dobije se koristeći sljedeća pravila:

- Ako je $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ onda je $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | h(x) \neq 0\} \cap D(g) \cap D(h)$.
- Ako je $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ onda je $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | g(x) \geq 0\} \cap D(g)$.
- Ako je $f(x) = \log g(x)$ onda je $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | g(x) > 0\} \cap D(g)$.
- Ako je $f(x) = tg(g(x))$ onda je $D(f) = (\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}) \cap D(g)$.
- Ako je $f(x) = ctg(g(x))$ onda je $D(f) = (\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}) \cap D(g)$.

- Ako je $f(x) = \arcsin(g(x))$ onda je $D(f) = [-1, 1] \cap D(g)$.
- Ako je $f(x) = \arccos(g(x))$ onda je $D(f) = [-1, 1] \cap D(g)$.

Zadatak 4.6.1. Odredite prirodno područje definicije funkcije f :

- (a) $f(x) = \frac{5x}{x-2}$
- (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
- (c) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 1}$
- (d) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$
- (e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 3x}}{x-4}$
- (f) $f(x) = \log \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$
- (g) $f(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$
- (h) $f(x) = 5^{\frac{1}{2x-1}}$
- (i) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
- (j) $f(x) = \sqrt{\frac{(x+4)(x-3)}{1-x}} + \ln(x^2 + x - 6)$

Rješenje:

- (a) $f(x) = \frac{5x}{x-2}$
 $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$
 $D(f) = \langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$
- (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
 $x^2 + 5 \geq 0$
 $D(f) = \mathbb{R}$
- (c) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 1}$
 $-x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq -1$
 $D(f) = \emptyset$
- (d) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$
 $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$
 $2 + x > 0 \Rightarrow x > -2$
 $D(f) = \langle -2, 0 \rangle$

(e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-2x^2-3x}}{x-4}$
 $x^3 - 2x^2 - 3x \geq 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x - 3) \geq 0 \Rightarrow x(x+1)(x-3) \geq 0$

	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
x	-	-	+	+	
x+1	-	+	+	+	
x-3	-	-	-	+	
	-	+	-	+	

$x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$
 $D(f) = [-1, 0] \cup [3, 4) \cup \langle 4, +\infty \rangle$

(f) $f(x) = \log \frac{x^2-3x+2}{x+1}$
 $\frac{x^2-3x+2}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x+1} > 0$

	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
x-1	-	-	+	+	
x+1	-	+	+	+	
x-2	-	-	-	+	
	-	+	-	+	

$D(f) = \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$

(g) $f(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$
 $\ln(1-x) \geq 0 \Rightarrow e^{\ln(1-x)} \geq e^0 \Rightarrow 1-x \geq 1 \Rightarrow x \leq 0$
 $1-x > 0 \Rightarrow x < 1$
 $D(f) = \langle -\infty, 0 \rangle$

(h) $f(x) = 5^{\frac{1}{2x-1}}$
 $2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$
 $D(f) = \langle -\infty, \frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}, \infty \rangle$

(i) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
 $e^x - e^{-x} \neq 0 \Rightarrow e^{2x} - 1 \neq 0 \Rightarrow e^{2x} \neq 1 \Rightarrow \ln(e^{2x}) \neq \ln(1) \Rightarrow 2x \neq 0 \Rightarrow$
 $x \neq 0$
 $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(j) Izraz pod korijenom mora biti veći ili jednak 0:

$$\frac{(x+4)(x-3)}{1-x} \geq 0$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

	$-\infty$	-4	1	3	$+\infty$
$x+4$	-	+	+	+	
$x-3$	-	-	-	+	
$1-x$	+	+	-	-	
	+	-	+	-	

$A = \langle -\infty, -4] \cup \langle 1, 3]$ Izraz koji se logaritmiraju mora biti strogo veći od 0:

$$x^2 + x - 6 > 0$$

$$(x + 3)(x - 2) > 0$$

	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$	-	+	+	
$x-2$	-	-	+	
	+	-	+	

$$B = \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$$

$$D(f) = A \cap B = \langle -\infty, -4] \cup \langle 2, 3]$$

4.7 Limes funkcije

4.7.1 Limes funkcije u točki

Ponekad je zanimljivo promatrati ponašanje funkcije u okolini neke točke. Ta točka ne mora nužno biti u domeni zadane funkcije. Štoviše, najčešće je upravo najzanimljivije promatrati kako se funkcija ponaša u okolini točke u kojoj nije definirana. U tu svrhu definira se pojam **limesa funkcije u točki**. Neka je f realna funkcija realne varijable i $a \in \mathbb{R}$. Kaže se da funkcija f ima limes L u točki a ako vrijedi da za svaki realni broj $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in D(f)$, $x \neq a$ vrijedi ako je $|x - a| < \delta$ onda je $|f(x) - L| < \epsilon$.

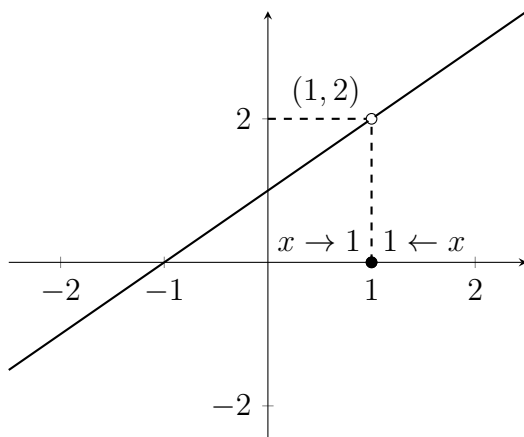
Drugim rječima, koliko god malen $\epsilon > 0$ izaberemo postoji neki $\delta > 0$ tako da se sve točke koje su δ blizu točke a preslikaju u ϵ blizinu vrijednosti L . Ako limes funkcije f u točki a postoji, on je jedinstven i označava se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Primjer 4.7.1. Promotrimo funkciju $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Funkcija f nije definirana u točki $x = 1$, ali za sve točke $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ vrijedi

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

Dakle, funkcija f se na okolini točke $x = 1$ ponaša kao funkcija $g(x) = x + 1$, odnosno kad x teži prema 1 funkcijska vrijednost $f(x)$ teži prema $g(1) = 2$. Vrijedi $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.



Limes funkcije f u točki a govori o ponašanju funkcije f kad se funkcijska vrijednost približava točki a . Ukoliko se točki a približava samo s jedne strane, govori se o **jednostranom limesu**. Neka je f realna funkcija realne varijable i $a \in \mathbb{R}$. L je limes s desna funkcije f u točki a ako vrijedi da za svaki realni broj $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in D(f)$, $x > a$ vrijedi:

$$\text{ako je } x - a < \delta \text{ onda je } |f(x) - L| < \epsilon$$

Ako limes s desna funkcije f u točki a postoji, on je jedinstven i označava se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

L je limes s lijeva funkcije f u točki a ako vrijedi da za svaki realni broj $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in D(f)$, $x < a$ vrijedi:

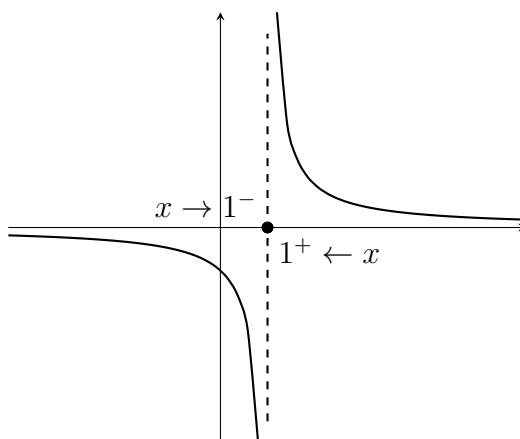
ako je $a - x < \delta$ onda je $|f(x) - L| < \epsilon$

Ako limes s lijeva funkcije f u točki a postoji, on je jedinstven i označava se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Napomena 4.7.1. U gornjim definicijama limesa, te limesa s desna i s lijeva, limes L je realan broj. Međutim, moguće je da kad funkcija teži k nekoj točki x funkcijska vrijednost teži u $+\infty$ ili $-\infty$.

Primjer 4.7.2. Promotrimo funkciju $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Funkcija nije definirana u točki $x = 1$. Kada x teži u 1 s lijeva funkcijska vrijednost $f(x)$ teži k $-\infty$. Kad x teži u 1 s desna funkcijska vrijednost $f(x)$ teži k $+\infty$.



Neka je $a \in \mathbb{R}$ i $L_1 = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ i $L_2 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Za računanje limesa tada vrijede sljedeća svojstva:

- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \pm L_2$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$
- Ako je $L_2 \neq 0$ onda je $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$
- $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Za račun s ∞ vrijedi:

- $c + (\pm\infty) = (\pm\infty) + c = \pm\infty, c \in \mathbb{R}$

- $(-\infty) - \infty = -\infty$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $c \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot c = \pm\infty, c \in \mathbb{R}, c > 0$
- $c \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot c = \mp\infty, c \in \mathbb{R}, c < 0$
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
- $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
- $\frac{c}{\pm\infty} = 0$

U nastavku se obrađuje limes racionalne funkcije. Neka je $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ racionalna funkcija. Pri računanju limesa funkcije f u točki $a \in \mathbb{R}$ može se dogoditi jedna od tri sljedeće situacije:

- Točka a nije nultočka nazivnika $Q_m(x)$ funkcije f . U tom slučaju funkcija f je dobro definirana u točki a , pa je:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}$$

Odnosno limes funkcije jednak je funkcijskoj vrijednosti u toj točki.

Primjer 4.7.3. Odredite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2}{x + 3}$$

Točka $x = 1$ nije nultočka nazivnika $x + 3$, pa vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2}{x + 3} = \frac{1^2 - 2}{1 + 3} = \frac{-1}{4}$$

- Točka a je nultočka brojnika $P_n(x)$ i nazivnika $Q_m(x)$ funkcije f . U tom slučaju limes se računa tako da se faktorizira brojnik i nazivnik funkcije f te se razlomak krati s $(x - a)$.

Primjer 4.7.4. Odredite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2}{x^2}$$

Točka $x = 0$ je nultočka brojnika $x^3 - x^2$ i nultočka nazivnika x^2 . Vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = 0 - 1 = -1$$

- Točka a je nultočka nazivnika $Q_m(x)$, ali nije nultočka brojnika $P_n(x)$ funkcije f . U tom slučaju, kada x teži k a , $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je kvocijent realnog ne nul broja $P_n(x)$ i realnog broja $Q_m(x)$ čija vrijednost teži k nuli. Kada se realni ne-nul broj dijeli s brojem koji je po apsolutnoj vrijednosti jako blizu nuli, dobit će se broj koji je po apsolutnoj vrijednosti jako velik. Predznak tog broja ovisit će o predznaku $P_n(x)$ i $Q_m(x)$. Općenito, limes s lijeva i limes s desna ovakve funkcije mogu biti različiti. Dakle, u ovom slučaju računat će se posebno $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ i vrijedit će $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$.

Primjer 4.7.5. Odredite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x - 1}$$

Točka $x = 1$ je nultočka nazivnika $x - 1$ i nije nultočka brojnika $x - 3$.

Posebno se računa $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{x-1}$ i $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{x-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 3}{x - 1} = \left[\frac{1 - 3}{1^- - 1} = \frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

Pri računanju $\lim_{x \rightarrow 1^-}$ točki x prilazi s lijeva, dakle 1^- je broj koji teži 1 i malo je manji od 1. Ako se od takvog broja oduzme 1 dobit će se negativan broj koji teži k 0. Taj broj označava se s 0^- . Ako se dijeli negativan realan broj s negativnim realnim brojem koji teži k nuli dobit će se pozitivan broj koji teži $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 3}{x - 1} = \left[\frac{1 - 3}{1^+ - 1} = \frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

Pri računanju $\lim_{x \rightarrow 1^+}$ točki x prilazi s desna, dakle 1^+ je broj koji teži 1 i malo je veći od 1. Ako se od takvog broja oduzme 1 dobit će se pozitivan broj koji teži k 0. Taj broj označava se s 0^+ . Ako se dijeli negativan realan broj s pozitivnim realnim brojem koji teži k nuli dobit će se negativan broj koji teži $-\infty$.

Zadatak 4.7.1. Izračunajte limese:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 4x^2 + 4x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 8x + 6}{x^4 - 6}$$

Rješenje:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+2}{x-3} = \frac{-1+2}{1-3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

(b) Točka $x = 2$ je nultočka brojnika i nazivnika pa vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-6)(x-2)}{x(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-6}{x(x-2)}.$$

Sada je $x = 2$ nultočka nazivnika $x(x-2)$, ali nije nultočka brojnika $x-6$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-6}{x(x-2)} &= \left[\frac{2-6}{2(2^- - 2)} = \frac{-4}{2 \cdot 0^-} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-6}{x(x-2)} &= \left[\frac{2-6}{2(2^+ - 2)} = \frac{-4}{2 \cdot 0^+} \right] = -\infty \end{aligned}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 8x + 6}{x^4 - 6} = \frac{0^2 - 8 \cdot 0 + 6}{0^4 - 6} = \frac{6}{-6} = -1$$

4.7.2 Limes funkcije u beskonačnosti

Limes funkcije se može promatrati i u $\pm\infty$. Tada se promatra čemu teži funkcijska vrijednost $f(x)$ kad x teži k $\pm\infty$. Oznaka koja se koristi je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

kad se promatra limes kad x teži u $-\infty$, odnosno

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

kad se promatra limes kad x teži u $+\infty$.

Limes u beskonačnosti racionalne funkcije $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ računat će se tako da se brojnik i nazivnik te funkcije podijele s najvećom potencijom od x koja se javlja u funkciji. Pri tom računu mogu se dogoditi sljedeći slučajevi:

- Ako je stupanj polinoma u brojniku strogo veći od stupnja polinoma u nazivniku, odnosno $n > m$ onda je

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n}}{b_m \frac{1}{x^{n-m}} + b_{m-1} \frac{1}{x^{n-(m-1)}} + \dots + b_1 \frac{1}{x^{n-1}} + b_0 \frac{1}{x^n}} = \\ &= \left[\frac{a_n}{0} \right] = \pm\infty\end{aligned}$$

Primjer 4.7.6. Odredite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x}{-3x^2 + 2x - 1}$$

Najveća potencija od x koja se javlja u brojniku i nazivniku je x^3 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x}{-3x^2 + 2x - 1} \underset{[:x^3]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{-3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \left[\frac{1}{-3 \cdot 0^+ + 2 \cdot 0^+ - 0^+} \right]$$

Potrebno je odrediti predznak nazivnika kad x teži k $+\infty$. Za $x > 0$ vrijedi:

$$\left| \frac{-3}{x} \right| > \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow \frac{3}{x} > \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow 3x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$$

Dakle, za dovoljno velike x , vrijedi da je prvi pribrojnik $\frac{-3}{x}$ u sumi $\frac{-3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ po apsolutnoj vrijednosti veći od drugog pribrojnika $\frac{2}{x^2}$. Kako je predznak prvog pribrojnika kad x teži k $+\infty$ negativan, a predznak drugog pribrojnika kad x teži k $+\infty$ pozitivan, to njihova suma ima negativan predznak. Treći pribrojnik $\frac{1}{x^3}$ također ima negativan predznak kad x teži k $+\infty$. Odavde slijedi da suma $\frac{-3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ teži k 0^- kad x teži k $+\infty$. To jest

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x}{-3x^2 + 2x - 1} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

- Ako je stupanj polinoma u brojniku strogo manji od stupnja polinoma u nazivniku, odnosno $n < m$ onda je

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n \frac{1}{x^{m-n}} + a_{n-1} \frac{1}{x^{m-(n-1)}} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{m-1}} + a_0 \frac{1}{x^m}}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots + b_1 \frac{1}{x^{m-1}} + b_0 \frac{1}{x^m}} = \\ &= \left[\frac{0}{b_m} \right] = 0\end{aligned}$$

Primjer 4.7.7. Odredite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2}{-3x^4 + 1}$$

Najveća potencija od x koja se javlja u brojniku i nazivniku je x^4 .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 \cdot x^4}{-3x^4 + 1 \cdot x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}}{-3 + \frac{1}{x^4}} = \left[\frac{0}{-3} \right] = 0$$

- Ako je stupanj polinoma u brojniku jednak stupnju polinoma u nazivniku, odnosno $n = m$ onda je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n}}{b_n + b_{n-1} \frac{1}{x} + \cdots + b_1 \frac{1}{x^{n-1}} + b_0 \frac{1}{x^n}} = \frac{a_n}{b_n} \end{aligned}$$

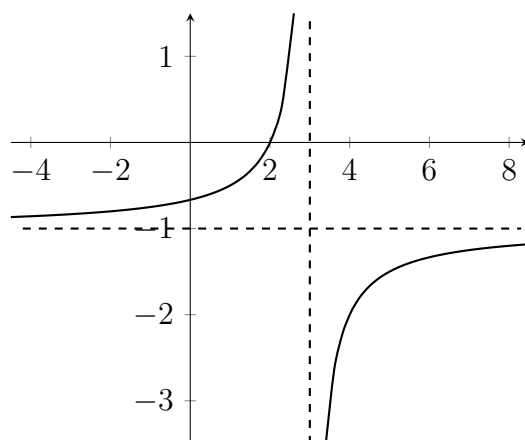
Primjer 4.7.8. Odredite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x + 2}{-2x^2 + 1}$$

Najveća potencija od x koja se javlja u brojniku i nazivniku je x^2 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x + 2 \cdot x^2}{-2x^2 + 1 \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{-2 + \frac{1}{x^2}} = \left[\frac{4}{-2} \right] = -2$$

Zadatak 4.7.2. Zadan je graf funkcije f . Odredite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.



Rješenje:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 0\end{aligned}$$

4.8 Asimptote funkcije

Pri analizi kompliciranih funkcija korisno je funkciju aproksimirati nekom jednostavnijom funkcijom. Jedna od najjednostavnijih realnih funkcija je linearna funkcija čiji je graf pravac. Asimptota je pravac kojem se graf funkcije $f(x)$ približava kad x teži u $\pm\infty$ ili u neku točku koja se ne nalazi u domeni funkcije. Te točke leže na rubovima domene funkcije. Asimptote se mogu podijeliti na horizontalne, vertikalne i kose asimptote.

4.8.1 Horizontalna asimptota

Pravac $y = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ je horizontalna asimptota funkcije f s lijeve strane ako je

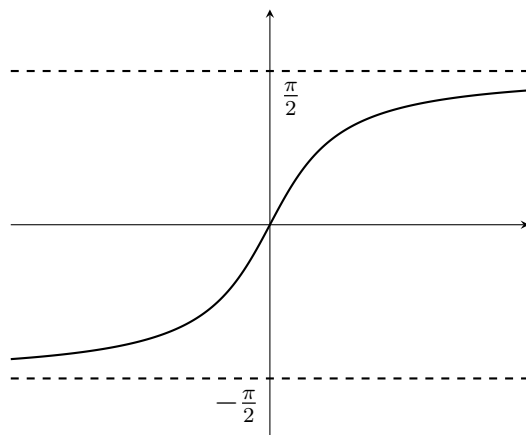
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

odnosno horizontalna asimptota funkcije f s desne strane ako je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$$

Napomena 4.8.1. Funkcija sa svake strane može imati najviše jednu horizontalnu asimptotu.

Zadatak 4.8.1. Odredite horizontalne asimptote funkcije $f(x) = \arctg(x)$ čiji je graf zadan na slici.



Rješenje:

Pravac $y = \frac{\pi}{2}$ je desna, a pravac $y = -\frac{\pi}{2}$ lijeva horizontalna asimptota funkcije $f(x) = \arctg(x)$.

Zadatak 4.8.2. Odredite horizontalne asimptote sljedećih funkcija

(a) $f(x) = \frac{3x^2-2x+6}{6x^2-2x}$

(b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

(c) $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$

(d) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

Rješenje:

(a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2-2x+6}{6x^2-2x} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}}{6-\frac{2}{x}} = \left[\frac{3-0+0}{6-0} \right] = \frac{1}{2}.$

Dakle, pravac $y = \frac{1}{2}$ je horizontalna asimptota funkcije f s obje strane.

(b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \left[\frac{1+0}{1-0} \right] = 1.$

Dakle, pravac $y = 1$ je horizontalna asimptota funkcije f s obje strane.

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+3} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty.$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+3} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty.$

Funkcija nema horizontalnih asimptota.

(d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2+1} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{0-0}{1+0} \right] = \frac{0}{1} = 0.$

Dakle, pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota funkcije f s obje strane.

4.8.2 Vertikalna asimptota

Pravac $x = x_0$ je vertikalna asimptota funkcije f u točki $x_0 \in \mathbb{R}$ s lijeve strane ako je

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

ili

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

Pravac $x = x_0$ je vertikalna asimptota funkcije f u točki $x_0 \in \mathbb{R}$ s desne strane ako je

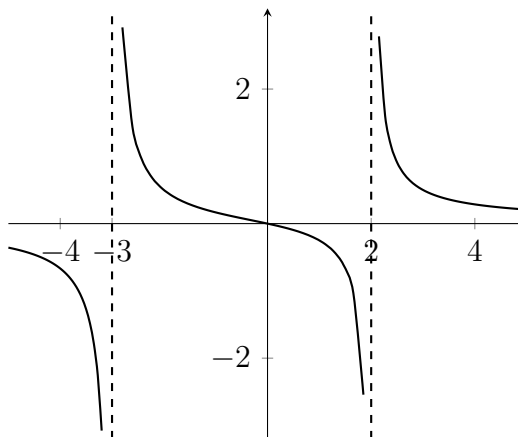
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

ili

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

Ako je $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ onda su kandidati za vertikalne asimptote pravci okomiti na os y koje prolaze nultočkama funkcije g .

Zadatak 4.8.3. Odredite vertikalne asimptote funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2+x-6}$ čiji je graf zadan na slici.



Rješenje:

Pravci $x = -3$ i $x = 2$ su vertikalne asimptote funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2+x-6}$.

Zadatak 4.8.4. Odredite vertikalne asimptote sljedećih funkcija

(a) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

(b) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Rješenje:

$$(a) x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x+3} = \left[\frac{-1+2}{-1+3} \right] = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+2}{x+3} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x+2}{x+3} = \left[\frac{-1}{0^-} \right] = +\infty$$

Pravac $x = -3$ je vertikalna asimptota funkcije f . Pravac $x = -1$ nije vertikalna asimptota funkcije f .

$$(b) x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = [1 - 1] = 0$$

Funkcija nema vertikalnih asimptota.

$$(c) x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcije f .

4.8.3 Kosa asimptota

Pravac $y = kx + l$, $k, l \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ je kosa asimptota funkcije f s lijeve strane ako je

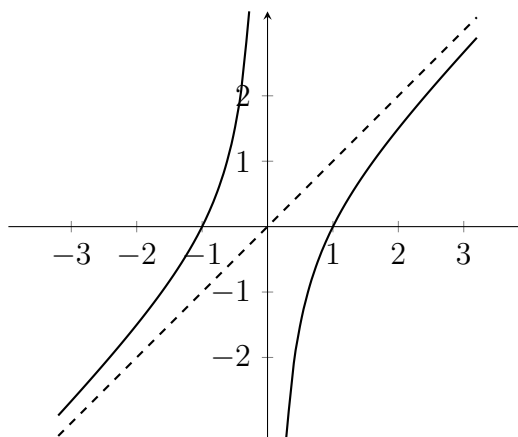
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ i } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = l,$$

odnosno kosa asimptota funkcije f s desne strane ako je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = l.$$

Napomena 4.8.2. Ako funkcija ima horizontalnu asimptotu s jedne strane, onda ne može imati kosu asimptotu s te strane. Vrijedi i obrat, ako funkcija ima kosu asimptotu s jedne strane, onda na toj strani ne može imati horizontalnu asimptotu. Funkcija može imati najviše dvije kose asimptote, po jednu sa svake strane.

Zadatak 4.8.5. Odredite kose asimptote funkcije $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ čiji je graf zadan na slici.



Rješenje:

Pravac $y = x$ je kosa asimptota funkcije $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

Zadatak 4.8.6. Odredite kose asimptote sljedećih funkcija

(a) $f(x) = \frac{2-2x^2}{2x}$

(b) $f(x) = \frac{2x^2-2x+1}{2x-1}$

Rješenje:

(a)

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2-2x^2}{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-2x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2} - 2}{2} = \left[\frac{0-2}{2} \right] = -1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-2x^2}{2x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-2x^2+2x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Pravac $y = -x$ je kosa asimptota funkcije $f(x) = \frac{2-2x^2}{2x}$.

(b)

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2-2x+1}{2x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 1 \stackrel{!}{=} x^2}{2x^2 - x \stackrel{!}{=} x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x}} = \left[\frac{2 - 0 + 0}{2 - 0} \right] = 1 \\
l &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 2x + 1}{2x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + x}{2x - 1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 1 \stackrel{!}{=} x}{2x - 1 \stackrel{!}{=} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \left[\frac{-1 + 0}{2 - 0} \right] = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Pravac $y = x - \frac{1}{2}$ je kosa asimptota funkcije $f(x) = \frac{2x^2-2x+1}{2x-1}$.

4.9 Derivacija funkcije

Povijesno su dva po prirodi različita problema bila glavna motivacija za razvoj diferencijalnog računa. Jedan od njih je fizikalni problem nalaženja trenutne brzine. Rješavanjem tog problema bavio se Isaac Newton¹. Neka je $s(t), t \geq 0$, funkcija puta točke u vremenskom intervalu $[0, t]$. Prosječna brzina te točke u vremenskom intervalu $[t_0, t]$ definira se kao:

$$\bar{v}(t_0, t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Pitanje je kako definirati trenutnu brzinu u trenutku t_0 . Ukoliko se smanjuje interval $[t_0, t]$ prosječna brzina na intervalu postaje sve sličnija trenutnoj brzini. Odnosno, problem se može riješiti promatranjem limesa

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

ako taj limes postoji. Drugi problem koji je doveo do izuma diferencijalnog računa je problem nalaženja tangente na graf funkcije f u nekoj točki x_0 . Tim problemom bavio se Gottfried Wilhelm Leibniz². Sekanta je pravac koji siječe graf funkcije u dvije točke. Koeficijent smjera sekante funkcije koja prolazi kroz točke x_0 i x dan je s:

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

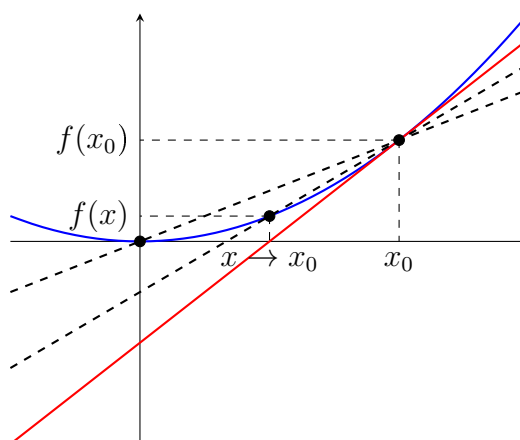
¹Isaac Newton, (Woolsthorpe, 25. prosinca 1642. – Kensington, 20. ožujka 1727.), engleski fizičar, matematičar i astronom.

²Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1. srpnja 1646. – Hannover, 14. studenog 1716.), njemački filozof, matematičar, fizičar i diplomat.

Tangenta u točki x_0 je pravac koji graf funkcije dodiruje u točki x_0 . Ukoliko se smanjuje udaljenost između točaka x i x_0 sekanta koja prolazi kroz x i x_0 postaje sve sličnija tangenti u x_0 . Dakle, koeficijent smjera tangente može se dobiti promatrajući limes

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ako taj limes postoji.



4.9.1 Definicija derivacije funkcije

Neka je funkcija f definirana na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i $x_0 \in I$. Kaže se da je funkcija f **derivabilna** ili **diferencijabilna u točki** x_0 ako postoji

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tada se vrijednost $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ označava s $f'(x_0)$ i zove **derivacija** funkcije f u točki x_0 . Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki $x \in I$ onda je dobro definirana funkcija koja svakom $x \in I$ pridružuje derivaciju $f'(x)$. Takva funkcija označava se s f' i zove **derivacija** funkcije f . U praksi derivacije funkcija ne traže se po definiciji, već se koristi tablica već unaprijed izračunatih derivacija i pravila deriviranja.

4.9.2 Tablica derivacija

- $c' = 0, c \in \mathbb{R}$
- $x' = 1$
- $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{Z}$
- $(x^a)' = ax^{a-1}, a \in \mathbb{R}, x > 0$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(tgx)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$
- $(ctgx)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

4.9.3 Pravila deriviranja

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \text{ za } g(x) \neq 0$
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Derivacija zbroja i razlike

Neka su f i g derivabilne realne funkcije realne varijable i $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Tada vrijedi:

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

Zadatak 4.9.1. Odredite derivacije sljedećih funkcija:

- (a) $f(x) = 5$
- (b) $f(x) = x + 3$
- (c) $f(x) = \sin x - \cos x$
- (d) $f(x) = 4x^2$
- (e) $f(x) = 2x^3 - 6x + 2$
- (f) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$
- (g) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt[4]{x}$
- (h) $f(x) = 5e^x$
- (i) $f(x) = \frac{1}{x}$
- (j) $f(x) = \log_3 x$
- (k) $f(x) = 4 \cdot 5^x$

Rješenje:

- (a) $(f(x))' = 5' = 0$
- (b) $(f(x))' = (x + 3)' = x' + 3' = 1 + 0 = 1$
- (c) $(f(x))' = (\sin x - \cos x)' = (\sin x)' - (\cos x)' = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x$
- (d) $(f(x))' = (4x^2)' = 4(x^2)' = 4 \cdot 2x^{2-1} = 8x$
- (e) $(f(x))' = (2x^3 - 6x + 2)' = (2x^3)' - (6x)' + (2)' = 2 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 6$
- (f) $(f(x))' = (\sqrt[3]{x^5})' = (x^{\frac{5}{3}})' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

$$(g) \quad (f(x))' = (\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt[4]{x})' = (\sqrt[4]{x^3})' + (2\sqrt[4]{x})' = (x^{\frac{3}{4}})' + 2(x^{\frac{1}{4}})' = \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{4}} + 2 \cdot \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}}$$

$$(h) \quad (f(x))' = (5e^x)' = 5e^x$$

$$(i) \quad (f(x))' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(j) \quad (f(x))' = (\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$$

$$(k) \quad (f(x))' = (4 \cdot 5^x)' = 4 \cdot 5^x \ln 5$$

Derivacija umnoška

Neka su f i g derivabilne realne funkcije realne varijable. Tada za derivaciju umnoška $f \cdot g$ vrijedi:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Zadatak 4.9.2. Odredite derivacije sljedećih funkcija:

$$(a) \quad f(x) = x \cdot \sin x$$

$$(b) \quad f(x) = x^3 \cdot \ln x$$

$$(c) \quad f(x) = (x + 3) \cdot (x^2 + 1)$$

$$(d) \quad f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos x$$

$$(e) \quad f(x) = (1 + x^2) \cdot \arctg x$$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned} (f(x))' &= (x \cdot \sin x)' = x' \sin x + x(\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \\ &= \sin x + x \cos x \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (f(x))' &= (x^3 \ln x)' = (x^3)' \ln x + x^3(\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = \\ &= 3x^2 \ln x + x^2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 (f(x))' &= ((x+3)(x^2+1))' = \\
 &= (x+3)'(x^2+1) + (x+3)(x^2+1)' = \\
 &= (1+0)(x^2+1) + (x+3)(2x+0) = \\
 &= x^2+1+2x^2+6x = 3x^2+6x+1
 \end{aligned}$$

(d)

$$(f(x))' = (\sqrt{x} \cos x)' = (\sqrt{x})' \cos x + \sqrt{x}(\cos x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin x$$

(e)

$$\begin{aligned}
 (f(x))' &= ((1+x^2)\operatorname{arctg} x)' = \\
 &= (1+x^2)'\operatorname{arctg} x + (1+x^2)(\operatorname{arctg} x)' = \\
 &= 2x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1+x^2}{1+x^2} = 2x \cdot \operatorname{arctg} x + 1
 \end{aligned}$$

Derivacija kvocijenta

Neka su f i g derivabilne realne funkcije realne varijable i neka je $g(x) \neq 0$ za svaki x iz domene funkcija. Tada za derivaciju kvocijenta $\frac{f}{g}$ vrijedi:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Zadatak 4.9.3. Odredite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

(b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

(c) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

(d) $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$

(e) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
 (f(x))' &= \left(\frac{x^2}{x+1} \right)' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \\
 &= \frac{2x(x+1) - x^2(1+0)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

(b)

$$(f(x))' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

(c)

$$(f(x))' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{(\sin x)'x - \sin x(x)'}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

(d)

$$\begin{aligned} (f(x))' &= \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(x^2 + 1)'\sqrt{x} - (x^2 + 1)(\sqrt{x})'}{x} = \frac{2x\sqrt{x} - \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \\ &= \frac{\frac{4x^2 - x^2 - 1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{3x^2 - 1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} (f(x))' &= \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)' = \frac{(e^x + 1)'(e^x - 1) - (e^x + 1)(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \\ &= \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 1)e^x}{(e^x - 1)^2} = \\ &= \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Derivacija kompozicije

Neka su f i g derivabilne realne funkcije realne varijable takve da je $f \circ g$ dobro definirana funkcija. Za derivaciju kompozicije $f \circ g$ vrijedi:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Zadatak 4.9.4. Odredite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \sin(x^3)$

(b) $f(x) = (\sin x)^3$

(c) $f(x) = \ln(3x)$

(d) $f(x) = e^{3x}$

(e) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^4$

$$(f) \quad f(x) = \sqrt[3]{3x+3}$$

Rješenje:

(a)

$$(f(x))' = (\sin(x^3))' = \cos(x^3) \cdot (x^3)' = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3)$$

(b)

$$(f(x))' = ((\sin x)^3)' = 3(\sin x)^2 \cdot (\sin x)' = 3(\sin x)^2 \cdot \cos x$$

(c)

$$(f(x))' = (\ln(3x))' = \frac{1}{3x} \cdot (3x)' = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$$

(d)

$$(f(x))' = (e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$$

(e)

$$\begin{aligned} (f(x))' &= ((x^2 + 2x + 1)^4)' = 4(x^2 + 2x + 1)^3(x^2 + 2x + 1)' = \\ &= 4(x^2 + 2x + 1)^3(2x + 2) \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} (f(x))' &= (\sqrt[3]{3x+3})' = ((3x+3)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}(3x+3)^{-\frac{2}{3}}(3x+3)' = \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(3x+3)^2}} \cdot 3 = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+3)^2}} \end{aligned}$$

4.9.4 Derivacije višeg reda

Deriviranjem funkcije dobije se nova funkcija, pa ukoliko je derivacija f' funkcije f derivabilna može se promatrati derivacija derivacije f' . Takva funkcija, u oznaci f'' naziva se **derivacija drugog reda** ili **druga derivacija** funkcije f . Dakle, za drugu derivaciju f'' vrijedi:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Analogno, ako je definirana i derivabilna derivacija reda $n-1$ $f^{(n-1)}$, **derivacija reda n** $f^{(n)}$ definira se kao derivacija derivacije reda $n-1$, to jest vrijedi:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'.$$

Zadatak 4.9.5. Odredite druge derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \sin x$

(b) $f(x) = x^2 + 3x + 1$

(c) $f(x) = e^{x^2}$

(d) $f(x) = \frac{x+1}{x}$

(e) $f(x) = (2x + 3)^3$

Rješenje:

(a) $(f(x))'' = (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$

(b) $(f(x))'' = (x^2 + 3x + 1)'' = (2x + 3)' = 2$

(c) $(f(x))'' = (e^{x^2})'' = (e^{x^2} 2x)' = e^{x^2} 2x + e^{x^2} \cdot 2 = e^{x^2} (2x + 2)$

(d)

$$\begin{aligned} (f(x))'' &= \left(\frac{x+1}{x}\right)'' = \left(\frac{1 \cdot x - (x+1) \cdot 1}{x^2}\right)' = \left(\frac{x - x - 1}{x^2}\right)' = \\ &= \left(\frac{-1}{x^2}\right)' = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} (f(x))'' &= ((2x + 3)^3)'' = (3((2x + 3)^2 \cdot 2))' = (6(2x + 3)^2)' = \\ &= 12(2x + 3) \cdot 2 = 24(2x + 3) = 48x + 72 \end{aligned}$$

4.9.5 Primjena derivacije

U uvodu poglavlja o derivacijama razmatrala se primjena derivacije na problem računanja trenutne brzine i problem računanja koeficijenta tangente na graf funkcije. U ovom poglavlju navodimo još tri primjene derivacija u matematici.

Računanje limesa

Ako se prilikom traženja limesa funkcije dane formulom pri formalnoj zamjeni varijable s brojem prema kojem x dobiju izrazi oblika

$$\frac{0}{0} \text{ ili } \frac{\infty}{\infty}$$

nije moguće odrediti je li dobiveni rezultat realan broj. U takvim situacijama, ako su funkcije u brojniku i nazivniku kvocijenta derivabilne može se koristiti **L'Hospitalovo pravilo**. Ako su f i g derivabilne funkcije za koje vrijedi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ili $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ onda vrijedi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Napomena 4.9.1. Gornje pravilo vrijedi i u slučaju kad x teži k ∞ .

Primjer 4.9.1. Odredite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1}$$

Kad x teži k ∞ onda $2x^2 + 3$ i $x^2 - 1$ teže k ∞ , pa imamo neodređen oblik $\frac{\infty}{\infty}$. Iz L'Hospitalovog pravila slijedi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 3)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2} = 2$$

Primjer 4.9.2. Odredite

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$x = -1$ je nultočka brojnika i nazivnika, pa imamo neodređen oblik $\frac{0}{0}$. Iz L'Hospitalovog pravila slijedi:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 2x + 1)'}{(x^2 + 3x + 2)'} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 2}{2x + 3} = \frac{0}{1} = 0$$

Monotonost i ekstremi funkcije

Ako je funkcija f derivabilna može se koristiti derivacija funkcije kako bi se odredili intervali monotonosti i ekstremi funkcije. Naime, vrijedi da je derivabilna funkcija:

- strogo rastuća na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako i samo ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in I$,
- strogo padajuća na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako i samo ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in I$.

Dakle, za određivanje intervala rasta i pada derivabilne funkcije f potrebno je najprije naći njenu derivaciju f' i zatim riješiti nejednadžbu $f'(x) > 0$.

- Rješenje nejednadžbe $f'(x) > 0$ je interval rasta funkcije f .
- Rješenje nejednadžbe $f'(x) < 0$ je interval pada funkcije f .

Točke za koje vrijedi $f'(x) = 0$ zovu se **stacionarne točke**. Ako derivabilna funkcija f ima lokalni ekstrem u točki x_0 onda je $f'(x_0) = 0$. To jest, svaki lokalni ekstrem derivabilne funkcije f je ujedno i stacionarna točka. Međutim, obrat ne vrijedi. Postoje stacionarne točke koje nisu lokalni ekstremi. Kako bismo provjerili da je stacionarna točka ekstrem koristi se druga derivacija. Ako je funkcija dvostruko derivabilna i u stacionarnoj točki x vrijedi:

- $f''(x) > 0$ onda je x lokalni minimum.
- $f''(x) < 0$ onda je x lokalni maksimum.

Zadatak 4.9.6. Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcije f .

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 8$$

Rješenje:

Vrijedi $f'(x) = x^2 - 9$. Kako bi se odredili intervale monotonosti funkcije f potrebno je riješiti nejednadžbu $f'(x) > 0$.

$$x^2 - 9 > 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3) > 0$$

	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$x-3$		-	-	+
$x+3$		-	+	+
$f'(x)$		+	-	+

Funkcija raste na intervalu $\langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$. Funkcija pada na intervalu $\langle -3, 3 \rangle$.

Kandidati za lokalne ekstreme su stacionarne točke funkcije f . Stacionarne točke se dobiju rješavajući jednadžbu $f'(x) = 0$.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 = \pm 3$$

Za određivanje jesu li x_1 i x_2 lokalni ekstremi potrebno je naći drugu derivaciju f'' funkcije f .

$$f''(x) = 2x$$

$f''(-3) = 2 \cdot (-3) = -6 < 0 \Rightarrow M(-3, f(-3)) = (-3, 26)$ je lokalni maksimum.

$f''(3) = 2 \cdot 3 = 6 > 0 \Rightarrow m(3, f(3)) = (3, -10)$ je lokalni minimum.

Konveksnost i konkavnost funkcije

Ako je funkcija f dva puta derivabilna na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ onda se pomoću predznaka druge derivacije određuju intervali konveksnosti i konkavnosti funkcije f . Vrijedi da je dva put derivabilna funkcija f :

- konveksna na I ako i samo ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in I$,
- konkavna na I ako i samo ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in I$.

Točka u kojoj je $f''(x) = 0$ nazivamo **točka infleksije**.

Zadatak 4.9.7. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije funkcije $f(x) = x^3$.

Rješenje:

$f''(x) = (x^3)'' = (3x^2)' = 6x$. Rješenje nejednadžbe $f''(x) > 0$:

$6x > 0 \Rightarrow x > 0$.

Funkcija je konkavna na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$ i konveksna na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. $x = 0$ je točka infleksije.

4.10 Skiciranje grafa funkcije

Graf funkcije $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ je skup svih točaka $(x, f(x))$ gdje je $x \in X = D(f)$. Za skiciranje graf funkcije f potrebno je odrediti:

- Domenu funkcije f
- Sjecišta funkcije f s koordinatnim osima:
 - Sjecište s x -osi su nultočke funkcije f koje se određuju rješavanjem jednadžbe $f(x) = 0$
 - Sjecište s y -osi je $f(0)$
- Asimptote funkcije f .
- Intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije f

Napomena 4.10.1. Za još precizniji grafički prikaz funkcije može se provesti analiza konkavnosti i konveksnosti te parnosti funkcije.

Primjer 4.10.1. Skicirajte graf funkcije $f(x) = x^3 + 3x^2$.

- Domena funkcije f je cijeli skup $\mathbb{R}$.

- Sjecišta s x -osi određuju se rješavanjem jednadžbe $x^3 + 3x^2 = 0$.

$$\begin{aligned}x^3 + 3x^2 &= 0 \\x^2(x + 3) &= 0 \\x_{1,2} &= 0 \\x_3 &= -3\end{aligned}$$

Sjecište s y -osi je točka $(0, f(0)) = (0, 0^3 + 3 \cdot 0^2) = (0, 0)$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 3x^2 = \infty \Rightarrow$ horizontalna asimptota ne postoji.
Vertikalna asimptota ne postoji jer je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ za svaku točku domene $a \in \mathbb{R} = D(f)$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + x = \infty \Rightarrow$ kosa asimptota ne postoji.
- Intervali monotonosti određuju se rješavajući nejednadžbu $f'(x) > 0$.
 $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) > 0$.

	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$3x$		-	-	+
$x+2$		-	+	+
$f'(x)$		+	-	+

Funkcija raste na intervalu $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$.

Funkcija pada na intervalu $\langle -2, 0 \rangle$.

Kandidati za lokalne ekstreme su stacionarne točke, $x_1 = 0, x_2 = -2$.

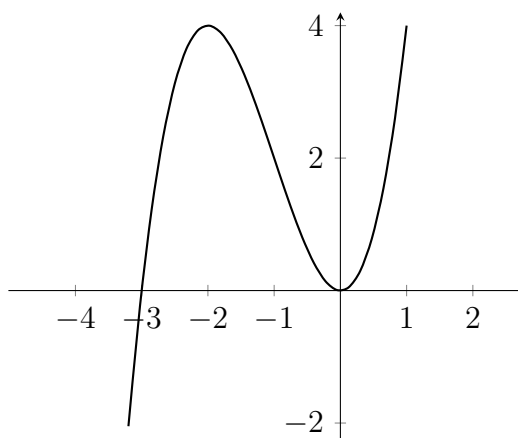
Pomoću druge derivacije određuje se radi li se o lokalnom minimumu ili maksimumu

$$f''(x) = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6$$

$f''(0) = 6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0 \Rightarrow (0, f(0)) = (0, 0)$ je lokalni minimum.

$f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 6 = -6 < 0 \Rightarrow (-2, f(-2)) = (-2, 4)$ je lokalni maksimum.

Graf funkcije f :



Primjer 4.10.2. Skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{4}{x^2-4}$.

- Domena funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ jer su $x_{1,2} = \pm 2$ nultočke nazivnika $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.
- Funkcija f ne sječe x -os jer jednačba $\frac{4}{x^2-4} = 0$ nema rješenja. Sjecište s y -osi je točka $(0, f(0)) = (0, \frac{4}{0^2-4}) = (0, -1)$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2-4} = 0 \Rightarrow$ Pravac $y = 0$ je (lijeva i desna) horizontalna asimptota.
Vertikalne asimptote traže se u nultočkama nazivnika funkcije f , $x_{1,2} = \pm 2$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4}{x^2 - 4} &= \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4}{x^2 - 4} &= \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{x^2 - 4} &= \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x^2 - 4} &= \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty\end{aligned}$$

Pravci $x = -2$ i $x = 2$ su vertikalne asimptote.

Kosih asimptota nema jer postoji horizontalna asimptota.

- Intervali monotonosti određuju se rješavajući nejednačbu $f'(x) > 0$.
 $f'(x) = (\frac{4}{x^2-4})' = (4(x^2-4)^{-1})' = -4(x^2-4)^{-2} \cdot 2x = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} > 0$
 $(x^2-4)^2$ je veće od 0 za svaki $x \neq \pm 2$, pa je

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -8x > 0, x \neq \pm 2 \Leftrightarrow x < 0, x \neq \pm 2$$

Funkcija raste na intervalu $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -2, 0 \rangle$.

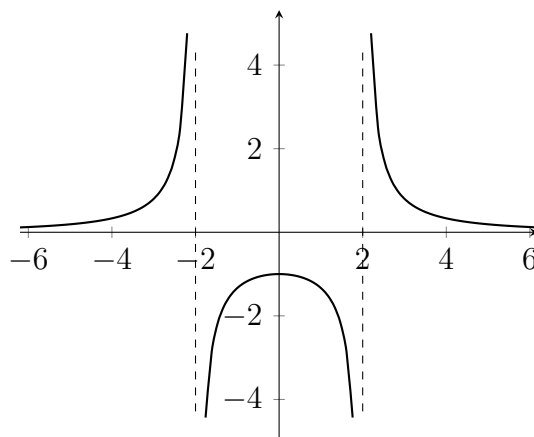
Funkcija pada na intervalu $\langle 0, 2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$.

Kandidati za lokalne ekstreme su stacionarne točke to jest, nultočke $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$ to jest $x = 0$. Kako bi odredili radi li se o lokalnom minimumu ili maksimumu traži se

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-8x}{(x^2-4)^2} \right)' = \frac{-8((x^2-4)^2) - (-8x)(2(x^2-4) \cdot 2x)}{(x^2-4)^4} = \\ &= \frac{8(x^2-4)(-(x^2-4) + 4x^2)}{(x^2-4)^4} = \\ &= \frac{8(-x^2 + 4 + 4x^2)}{(x^2-4)^3} = \frac{8(3x^2 + 4)}{(x^2-4)^3} \\ f''(0) &= \frac{8(3 \cdot 0^2 + 4)}{(0^2-4)^3} = \frac{32}{-64} = -0.5 < 0 \Rightarrow (0, f(0)) = (0, 1) \end{aligned}$$

je lokalni maksimum.

Graf funkcije f :



Primjer 4.10.3. Skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

- Domena funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ jer su $x_{1,2} = \pm 1$ nultočke nazivnika $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.
- Sjecišta s x -osi određujemo rješavanjem jednadžbe $\frac{x^2}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.
Sjecište s y -osi je točka $(0, f(0)) = (0, \frac{0^2}{0^2-1}) = (0, 0)$.

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \lfloor x^2 \rfloor}{x^2 - 1 \lfloor x^2 \rfloor} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \left[\frac{1}{1 - 0} \right] = 1$$

Pravac $y = 1$ je (lijeva i desna) horizontalna asimptota.

Vertikalne asimptote traže se u nultočkama nazivnika funkcije f ,
 $x_{1,2} = \pm 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} &= \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} &= \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} &= \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} &= \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \end{aligned}$$

Pravci $x = -1$ i $x = 1$ su vertikalne asimptote.

Kosih asimptota nema jer postoji horizontalna asimptota.

- Intervali monotonosti određuju se rješavajući nejednadžbu $f'(x) > 0$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)' = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} > 0$$

$(x^2 - 1)^2$ je veće od 0 za svaki $x \neq \pm 1$, pa je

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x > 0, x \neq \pm 1 \Leftrightarrow x < 0, x \neq \pm 1$$

Funkcija raste na intervalu $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -1, 0 \rangle$.

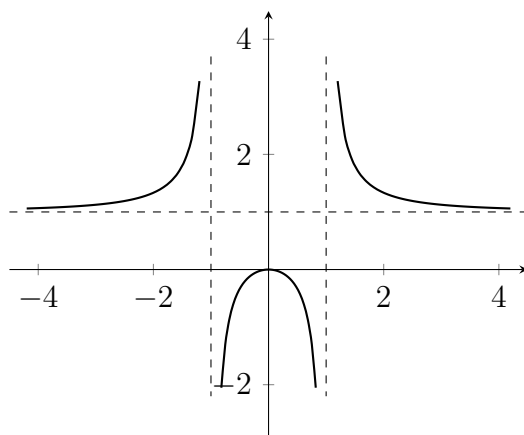
Funkcija pada na intervalu $\langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$.

Kandidati za lokalne ekstreme su stacionarne točke to jest, nultočke $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$ to jest $x = 0$. Kako bi odredili radi li se o lokalnom minimumu ili maksimumu traži se

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \frac{-2((x^2 - 1)^2) - (-2x)(2(x^2 - 1) \cdot 2x)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(x^2 - 1)(-2(x^2 - 1) + 8x^2)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{-2x^2 + 2 + 8x^2}{(x^2 - 1)^3} = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \\ f''(0) &= \frac{6 \cdot 0^2 + 2}{(0^2 - 1)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \Rightarrow (0, f(0)) = (0, 0) \end{aligned}$$

je lokalni maksimum.

Graf funkcije f :



Primjer 4.10.4. Skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^3}{3x^2-1}$.

- Domena funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\}$ jer su $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ nultočke nazivnika $3x^2 - 1 = (\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)$.
- Sjecišta s x -osi određuju se rješavanjem jednadžbe

$$\frac{x^3}{3x^2-1} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Sjecište s y -osi je točka $(0, f(0)) = (0, \frac{0^3}{3 \cdot 0^2 - 1}) = (0, 0)$.

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \mid : x^3}{3x^2 - 1 \mid : x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty$$

Horizontalna asimptota ne postoji.

Vertikalne asimptote traže se u nultočkama nazivnika funkcije f ,

$$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}:$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}-} \frac{x^3}{3x^2 - 1} = \left[\frac{-\frac{1}{3}}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}+} \frac{x^3}{3x^2 - 1} = \left[\frac{-\frac{1}{3}}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}-} \frac{x^3}{3x^2 - 1} = \left[\frac{\frac{1}{3}}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}+} \frac{x^3}{3x^2 - 1} = \left[\frac{\frac{1}{3}}{0^+} \right] = +\infty$$

Pravci $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ su vertikalne asimptote.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{3x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \mathrel{!} x^3}{3x^3 - x \mathrel{!} x^3} = \frac{1}{3 - \frac{1}{x^2}} = \\ &= \left[\frac{1}{3 - 0} \right] = \frac{1}{3} \\ l &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 1} - \frac{1}{3}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 3x^3 + x}{3(3x^2 - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \mathrel{!} x^2}{3(3x^2 - 1) \mathrel{!} x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{3(3 - \frac{1}{x^2})} = \left[\frac{0}{3(3 - 0)} \right] = 0 \end{aligned}$$

Pravac $y = x$ je (lijeva i desna) kosa asimptota.

- Intervali monotonosti određuju se rješavajući nejednadžbu $f'(x) > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3}{3x^2 - 1} \right)' = \frac{3x^2(3x^2 - 1) - x^3 \cdot 6x}{(3x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{9x^4 - 3x^2 - 6x^4}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2}{(3x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{3x^2(x^2 - 1)}{(3x^2 - 1)^2} > 0 \end{aligned}$$

$\frac{3x^2}{(3x^2-1)^2}$ je veće od 0 za svaki $x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, pa je

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = (x-1)(x+1) > 0, x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$		-	-	+
$x+1$		-	+	+
$f'(x)$		+	-	+

Funkcija raste na intervalu $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$.

Funkcija pada na intervalu $\langle -1, -\frac{\sqrt{3}}{3} \rangle \cup \langle -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \rangle \cup \langle \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \rangle$.

Kandidati za lokalne ekstreme su stacionarne točke to jest, nultočke $f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)}{(3x^2-1)^2}$ to jest $x_{1,2} = \pm 1, x_3 = 0$. Kako bi odredili radi li se o lokalnom minimumu ili maksimumu traži se

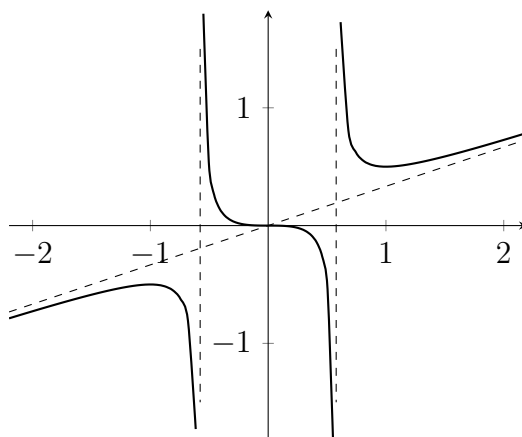
$$f''(x) = \left(\frac{x^3}{3x^2-1}\right)' = \frac{6x(x^2+1)}{(3x^2-1)^3}$$

$f''(-1) = \frac{6(-1)((-1)^2+1)}{(3(-1)^2-1)^3} = \frac{-12}{8} = -1.5 < 0 \Rightarrow (-1, f(1)) = (-1, -0.5)$ je lokalni maksimum.

$f''(1) = \frac{6 \cdot 1(1^2+1)}{(3 \cdot 1^2-1)^3} = \frac{12}{8} = 1.5 > 0 \Rightarrow (1, f(1)) = (1, 0.5)$ je lokalni minimum.

$f''(0) = \frac{6 \cdot 0(0^2+1)}{(3 \cdot 0^2-1)^3} = 0$. Prva derivacija u točki 0 ne mijenja predznak, pa je 0 stacionarna točka koja nije lokalni minimum ni lokalni maksimum.

Graf funkcije f :



Primjer 4.10.5. Skicirajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

- Domena funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ jer su $x_{1,2} = \pm 1$ nultočke nazivnika $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.
- Sjecišta s x -osi određuju se rješavanjem jednadžbe

$$\frac{x^3}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Sjecište s y -osi je točka $(0, f(0)) = (0, \frac{0^3}{0^2-1}) = (0, 0)$.

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \text{!} : x^3}{x^2 - 1 \text{!} : x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty$$

Horizontalna asimptota ne postoji.

Vertikalne asimptote traže se u nultokama nazivnika funkcije f , $x_{1,2} = \pm 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \left[\frac{-1}{0^-} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \end{aligned}$$

Pravci $x = -1$ i $x = 1$ su vertikalne asimptote.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \text{!} : x^3}{x^3 - x \text{!} : x^3} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \left[\frac{1}{1 - 0} \right] = 1 \\ l &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \text{!} : x^2}{x^2 - 1 \text{!} : x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \left[\frac{0}{1 - 0} \right] = 0 \end{aligned}$$

Pravac $y = x$ je (lijeva i desna) kosa asimptota.

- Intervali monotonosti određuju se rješavajući nejednadžbu $f'(x) > 0$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} > 0$$

$\frac{x^2}{(x^2-1)^2}$ je veće od 0 za svaki $x \neq \pm 1$, pa je

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0, x \neq \pm 1$$

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x - \sqrt{3}$		-	-	+
$x + \sqrt{3}$		-	+	+
$f'(x)$		+	-	+

Funkcija raste na intervalu $\langle -\infty, -\sqrt{3} \rangle \cup \langle -\sqrt{3}, +\infty \rangle$.

Funkcija pada na intervalu $\langle -\sqrt{3}, -1 \rangle \cup \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 1, \sqrt{3} \rangle$.

Kandidati za lokalne ekstreme su stacionarne točke to jest, nultočke $f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ to jest $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}, x_3 = 0$. Kako bi odredili radi li se o lokalnom minimumu ili maksimumu traži se

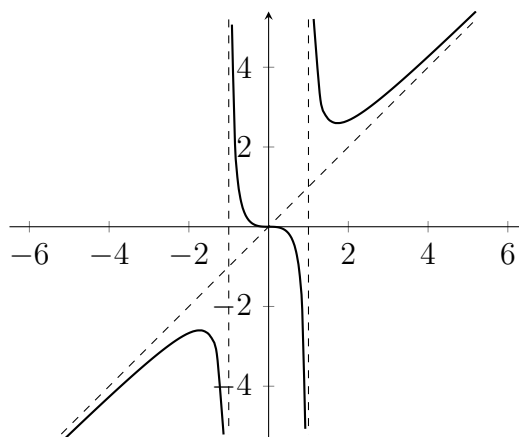
$$f''(x) = \left(\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(-\sqrt{3}) = \frac{2(-\sqrt{3})((- \sqrt{3})^2+3)}{((- \sqrt{3})^2-1)^3} = \frac{-12}{8} = -1.5 < 0 \Rightarrow (-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}) \text{ je lokalni maksimum.}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}((\sqrt{3})^2+3)}{((\sqrt{3})^2-1)^3} = \frac{12\sqrt{3}}{8} > 0 \Rightarrow (\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}) \text{ je lokalni minimum.}$$

$$f''(0) = \frac{2 \cdot 0(0^2+3)}{(0^2-1)^3} = 0. \text{ Prva derivacija u točki 0 ne mijenja predznak, pa je 0 stacionarna točka koja nije lokalni minimum ni lokalni maksimum.}$$

Graf funkcije f :



4.11 Zadaci za vježbu

Zadatak 4.11.1. Jesu li sljedeće funkcije injekcije?

(a) $f(x) = x^2 - x^4$

(b) $f(x) = \frac{2-x}{3-x}$

(c) $f(x) = \sin x$

(d) $f(x) = \ln(x^2)$

(e) $f(x) = (\ln x)^2$

(f) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

(a) $f(x) = x^2 - x^4$ nije injekcija jer je, naprimjer, $f(1) = 1^2 - 1^4 = 0 = (-1)^2 - (-1)^4 = f(-1)$.

(b) Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ proizvoljni elementi domene funkcije f . Pretpostavimo da vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$. Iz toga slijedi:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ \frac{2-x_1}{3-x_1} &= \frac{2-x_2}{3-x_2} \\ (2-x_1)(3-x_2) &= (3-x_1)(2-x_2) \\ 6-3x_1-2x_2+x_1x_2 &= 6-3x_2-2x_1+x_1x_2 \\ -3x_1-2x_2 &= -3x_2-2x_1 \\ -x_1 &= -x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Dakle, funkcija f je injekcija.

- (c) $f(x) = \sin x$ nije injekcija jer je, naprimjer, $f(0) = \sin 0 = 0 = \sin 2\pi = f(2\pi)$.
- (d) $f(x) = \ln(x^2)$ nije injekcija jer je, naprimjer, $f(1) = \ln(1^2) = \ln 1 = 0 = \ln 1 = \ln(-1)^2 = f(-1)$.
- (e) $D(f) = \langle 0, +\infty \rangle$ jer je domena prirodnog logaritma $\langle 0, +\infty \rangle$. Neka su $x_1, x_2 \in \langle 0, +\infty \rangle$ proizvoljni elementi domene funkcije f . Pretpostavimo da vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$. Iz toga slijedi:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ (\ln x_1)^2 &= (\ln x_2)^2 \\ (\ln x_1)^2 - (\ln x_2)^2 &= 0 \\ (\ln x_1 - \ln x_2)(\ln x_1 + \ln x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Dakle, ili je $\ln x_1 - \ln x_2 = 0$ pa je $\ln x_1 = \ln x_2$, odnosno $x_1 = x_2$ ili je

$$\begin{aligned} \ln x_1 + \ln x_2 &= 0 \\ \ln(x_1 \cdot x_2) &= 0 \\ \ln(x_1 \cdot x_2) &= \ln 1 \\ x_1 \cdot x_2 &= 1 \\ x_1 &= \frac{1}{x_2} \end{aligned}$$

Dakle za, naprimjer, $x_1 = e$ i $x_2 = \frac{1}{e}$ vrijedi $x_1 \neq x_2$ i $f(x_1) = f(e) = (\ln e)^2 = 1^2 = 1$ i $f(x_2) = f(\frac{1}{e}) = (\ln \frac{1}{e})^2 = (-1)^2 = 1$, pa funkcija f nije injekcija.

- (f) Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ proizvoljni elementi domene funkcije f . Pretpostavimo da vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$. Iz toga slijedi:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ \frac{x_1}{x_1 - 1} &= \frac{x_2}{x_2 - 1} \\ (x_1 - 1)(x_2) &= (x_2 - 1)(x_1) \\ x_1x_2 - x_2 &= x_1x_2 - x_1 \\ -x_2 &= -x_1 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Dakle, funkcija f je injekcija.

Zadatak 4.11.2. Jesu li sljedeće funkcije surjekcije?

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$

Rješenje:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ nije surjekcija jer za svaki negativni broj $y \in \langle -\infty, 0 \rangle$ ne postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) = x^2 = y$.

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ je surjekcija jer za proizvoljan $y \in \mathbb{R}$ za $x = \sqrt[3]{y}$ vrijedi $f(x) = f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.

Zadatak 4.11.3. Jesu li sljedeće funkcije bijekcije?

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = 4x^2$

(b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, g(x) = \frac{x+1}{x}$

Rješenje:

(a) $f(x) = 4x^2$ nije injekcija jer je, naprimjer, $f(1) = 4 \cdot 1^2 = 4 = 4 \cdot (-1)^2 = f(-1)$. Kako nije injekcija, to funkcija f nije ni bijekcija.

(b) Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ proizvoljni elementi domene funkcije g . Pretpostavimo da vrijedi $g(x_1) = g(x_2)$. Iz toga slijedi:

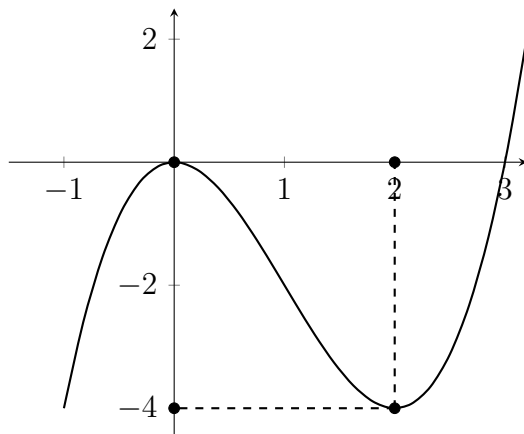
$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(x_2) \\ \frac{x_1 + 1}{x_1} &= \frac{x_2 + 1}{x_2} \\ x_2(x_1 + 1) &= x_1(x_2 + 1) \\ x_1x_2 + x_2 &= x_1x_2 + x_1 \\ x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

Dakle, funkcija g je injekcija. Neka je sad $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Odredimo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je $g(x) = y$.

$$\begin{aligned} g(x) &= y \\ \frac{x + 1}{x} &= y \\ x + 1 &= xy \\ x - xy &= -1 \\ x(1 - y) &= -1 \\ x &= \frac{1}{y - 1} \end{aligned}$$

$g(\frac{1}{y-1}) = \frac{\frac{1}{y-1}+1}{\frac{1}{y-1}} = \frac{\frac{1+y-1}{y-1}}{\frac{1}{y-1}} = y$. Dakle, g je i surjekcija, pa je onda i bijekcija.

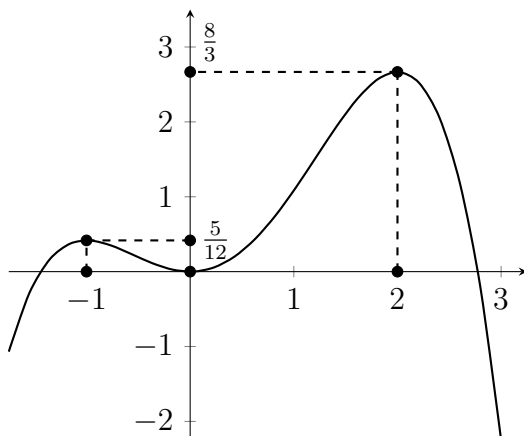
Zadatak 4.11.4. Dan je grafički prikaz funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$. Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcije f .



Rješenje:

Funkcija f raste na $\langle -\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ i pada na $[0, 2]$. Točka $(0, 0)$ je lokalni maksimum, a točka $(2, -4)$ lokalni minimum.

Zadatak 4.11.5. Dan je grafički prikaz funkcije $f(x) = \frac{-1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$. Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcije f .



Rješenje:

Funkcija f raste na $\langle -\infty, -1] \cup [0, 2]$ i pada na $[-1, 0] \cup [2, +\infty)$. Točka $(0, 0)$ je lokalni minimum, a točke $(-1, \frac{5}{12})$ i $(2, \frac{8}{3})$ su lokalni maksimumi.

Zadatak 4.11.6. Neka su dane funkcije $f(x) = \log \frac{x^4}{x^2-2}$ i $g(x) = \sqrt{x+2}$.

- (a) Odredite $f \circ g$.
- (b) Ispitajte paritet funkcije f .
- (c) Odredite g^{-1} .

Rješenje:

- (a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = \log \frac{(\sqrt{x+2})^4}{(\sqrt{x+2})^2-2} = \log \frac{(x+2)^2}{x+2-2} = \log \frac{x^2-4x+2}{x}$
- (b) $f(-x) = \log \frac{(-x)^4}{(-x)^2-2} = \log \frac{x^4}{x^2-2} = f(x) \Rightarrow f$ je parna funkcija.
- (c) $y = \sqrt{x+2} \Rightarrow y^2 = x+2 \Rightarrow y^2-2 = x \Rightarrow g^{-1}(x) = x^2-2$

Zadatak 4.11.7. Neka su dane funkcije $f(x) = \sqrt{x-5}$ i $g(x) = \frac{x^2-2}{x^2+5}$.

- (a) Odredite $g \circ f$.
- (b) Ispitajte paritet funkcije g .
- (c) Odredite g^{-1} .

Rješenje:

- (a) $g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{\sqrt{x-5}^2-2}{\sqrt{x-5}^2+5} = \frac{x-5-2}{x-5+5} = \frac{x-7}{x}$
- (b) $g(-x) = \frac{(-x)^2-2}{(-x)^2+5} = \frac{x^2-2}{x^2+5} = g(x) \Rightarrow g$ je parna funkcija.
- (c) $y = \frac{x^2-2}{x^2+5} \Rightarrow yx^2 + 5y = x^2 - 2 \Rightarrow yx^2 - x^2 = -2 - 5y \Rightarrow x^2(y-1) = -2-5y \Rightarrow x^2 = \frac{-2-5y}{y-1} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-2-5y}{y-1}} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{-2-5x}{x-1}}$

Zadatak 4.11.8. Neka su dane funkcije $f(x) = \log \frac{x^8}{x^4-3}$ i $g(x) = \sqrt[4]{x+3}$.

1. Odredite $f \circ g$.
2. Ispitajte paritet funkcije f .
3. Odredite g^{-1} .

Rješenje:

$$(a) f \circ g(x) = f(g(x)) = \log \frac{(\sqrt[4]{x+3})^8}{(\sqrt[4]{x+3})^4 - 3} = \log \frac{(x+3)^2}{x+3-3} = \log \frac{x^2+6x+9}{x}$$

$$(b) f(-x) = \log \frac{(-x)^8}{(-x)^4 - 3} = \log \frac{x^8}{x^4 - 3} = f(x) \Rightarrow f \text{ je parna funkcija.}$$

$$(c) y = \sqrt[4]{x+3} \Rightarrow y^4 = x+3 \Rightarrow y^4 - 3 = x \Rightarrow g^{-1}(x) = x^4 - 3$$

Zadatak 4.11.9. Odredite prirodno područje definicije sljedećih funkcija:

$$(a) f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x+5}} - 2$$

$$(b) f(x) = \ln\left(\frac{x-3}{x+3} - 2\right)$$

$$(c) f(x) = \sqrt{\frac{x^2-6}{-x}} - 5$$

$$(d) f(x) = \sqrt{\frac{(x+2)(x-5)}{2-x}} + \ln(x^2 - 3x)$$

$$(e) f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4} + \ln\left(\frac{(x+3)(1-x)}{x}\right)$$

Rješenje:

$$(a) D(f) = [-15, -5]$$

$$(b) D(f) = \langle -9, -3 \rangle$$

$$(c) D(f) = \langle -\infty, -6 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle$$

$$(d) D(f) = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$$

$$(e) D(f) = \langle -\infty, -3 \rangle$$

Zadatak 4.11.10. Odredite asimptote funkcije $f(x) = \frac{3-3x^2}{3x}$.

Rješenje:

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-3x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} - 3}{\frac{3}{x}} = \infty$$

Horizontalna asimptota ne postoji.

Kosa asimptota:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 3x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{3x^2} - 1 \right) = -1 \\ l &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 - 3x^2}{3x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 3x^2 + 3x^2}{3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

Pravac $y = -x$ je kosa asimptota.

Vertikalna asimptota:

$x = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 - 3x^2}{3x} &= \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 - 3x^2}{3x} &= \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty \end{aligned}$$

Pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota.

Zadatak 4.11.11. Odredite asimptote funkcije $f(x) = \frac{4x^2+1}{5x-5}$.

Rješenje:

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{5x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x} - \frac{5}{x^2}} = \left[\frac{4}{0} \right] = \infty \Rightarrow$$

ne postoji horizontalna asimptota.

Kosa asimptota:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{5x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x^2}}{5 - \frac{5}{x}} = \left[\frac{4}{5} \right] = \frac{4}{5} \\ l &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{5x - 5} - \frac{4}{5}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1 - 4x(x - 1)}{5x - 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 1}{5x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{5 - \frac{5}{x}} = \left[\frac{4}{5} \right] = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$y = \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}$ je kosa asimptota.

Vertikalna asimptota:

$5x - 5 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^2 + 1}{5x - 5} = \left[\frac{5}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2 + 1}{5x - 5} = \left[\frac{5}{0^+} \right] = +\infty$$

Pravac $x = 1$ je vertikalna asimptota.

Zadatak 4.11.12. Odredite asimptote funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

Rješenje:

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$$

Pravac $y = 1$ je horizontalna asimptota.

Kosa asimptota:

Nema kosih asimptota jer postoji horizontalna asimptota.

Vertikalne asimptote:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty$$

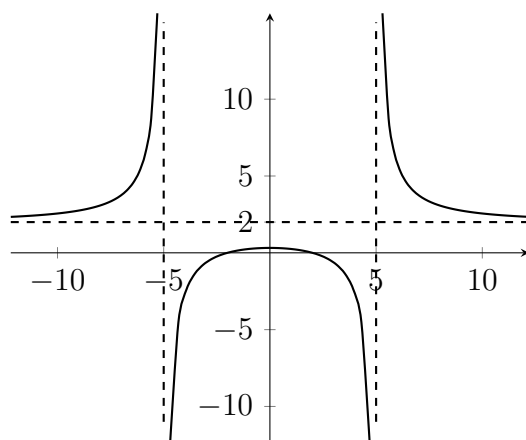
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty$$

$x = -2$ i $x = 2$ su vertikalne asimptote.

Zadatak 4.11.13. Zadan je graf funkcije f . Odredite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ i asimptote funkcije f .



Rješenje:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) &= -\infty\end{aligned}$$

Pravac $y = 2$ je horizontalna, a pravci $x = 5$ i $x = -5$ su vertikalne asimptote.

Zadatak 4.11.14. Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = e^{\sin x} + \cos\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(e^{\sin x} + \cos\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right)' = \\ &= e^{\sin x} \cos x - \sin\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= e^{\sin x} \cos x - \sin\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \\ &= e^{\sin x} \cos x - \sin\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \frac{-2}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

Zadatak 4.11.15. Odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \cos\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + \ln(\sin x)$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\cos\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + \ln(\sin x) \right)' = \\
 &= -\sin\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin x} = \\
 &= -\sin\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} + \operatorname{ctgx} = \\
 &= -\sin\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \frac{x^2 - 1}{x^2} + \operatorname{ctgx}
 \end{aligned}$$

Zadatak 4.11.16. Odredite lokalne ekstreme i intervale monotonosti funkcije

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x - \frac{2}{3}$$

Rješenje:

$$f'(x) = x^2 + 2x - 8$$

$$x^2 + 2x - 8 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+4) \geq 0 \text{ Funkcija raste na intervalu } \langle -\infty, -4 \rangle \cup$$

	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$x-2$		-	-	+
$x+4$		-	+	+
$f'(x)$		+	-	+

$\langle 2, +\infty \rangle$. Funkcija pada na intervalu $\langle -4, 2 \rangle$.

$$f''(x) = 2x + 2$$

$f''(-4) = 2 \cdot (-4) + 2 = -6 < 0 \Rightarrow M(-4, f(-4)) = (-4, 26)$ je lokalni maksimum.

$f''(2) = 2 \cdot (2) + 2 = 6 > 0 \Rightarrow m(2, f(2)) = (2, -10)$ je lokalni minimum.

Zadatak 4.11.17. Ispitajte područje definicije i odredite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x+4)(x-3)}{1-x}} + \ln(x^2 + x - 6)$$

Rješenje:

Izraz pod korijenom mora biti veći ili jednak 0:

$$\frac{(x+4)(x-3)}{1-x} \geq 0$$

$$x+4=0 \Rightarrow x=-4$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

	$-\infty$	-4	1	3	$+\infty$
$x+4$		-	+	+	+
$x-3$		-	-	-	+
$1-x$		+	+	-	-
		+	-	+	-

$$\langle -\infty, -4] \cup \langle 1, 3]$$

Izraz koji se logaritmiraju mora biti strogo veći od 0:

$$x^2 + x - 6 > 0$$

$$(x+3)(x-2) > 0$$

$$\langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$$

	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$		-	+	+
$x-2$		-	-	+
$f(x)$		+	-	+

$$D(f) = \langle -\infty, -4] \cup \langle 2, 3]$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\sqrt{\frac{x^2 + x - 12}{1 - x}} + \ln(x^2 + x - 6) \right)' = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2 + x - 12}} \frac{(2x+1)(1-x) - (x^2 + x - 12)(-1)}{(1-x)^2} + \frac{1}{x^2 + x - 6} (2x+1) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{-x^2 + 2x - 11}{(1-x)\sqrt{(1-x)(x^2 + x - 12)}} + \frac{2x+1}{x^2 + x - 6}
 \end{aligned}$$

Poglavlje 5

Integrali

U ovom poglavlju obraditi će se pojam i osnovna svojstva neodređenog, odnosno određenog integrala, metode integriranja ali i primjena određenog integrala u geometriji i mehanici.

5.1 Neodređeni integrali

Dosad su se u ovom udžbeniku rješavali zadaci u kojima je bila zadana funkcija $y = F(x)$ i trebalo je naći njenu derivaciju $y' = F'(x)$. Međutim, u ovom poglavlju će se obraditi zadaci ako je zadano obrnuto, tj. dana je derivacija funkcije $F(x)$, $F'(x) = f(x)$, a treba naći funkciju $F(x)$. Takva operacija koja je inverzna (obrnuta) od derivacija zove se operacija nalaženja integrala odnosno integriranje.

5.1.1 Pojam i osnovna svojstva neodređenog integrala

Funkcija $F(x)$ zove se **primitivna funkcija** ako vrijedi $F'(x) = f(x)$. Na primjer, funkcija x^4 je primitivna funkcija funkcije $4x^3$ jer vrijedi $(x^4)' = 4x^3$. No, može se primijetiti da funkcija x^4 nije jedina primitivna funkcija funkcije $4x^3$ već primitivne funkcije mogu biti i npr. $x^4 + 3$, $x^4 - 2$. Općenito, zadanoj funkciji ne pripada samo jedna primitivna funkcija već bezbroj njih koje se međusobno razlikuju samo za neku konstantu C . Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ zove se **neodređeni integral funkcije** $f(x)$ i piše se:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Funkcija f zove se **podintegralna funkcija**, konstanta C je **konstanta integracije** dok je varijabla x **varijabla integracije**.

Dakle, ranije promatrani primjer može se zapisati

$$\int 4x^3 dx = x^4 + C$$

S obzirom da su deriviranje i integriranje obrnute operacije rezultat integriranja može se kontrolirati deriviranjem: $(x^4 + C)' = 4x^3$.

Osnovna svojstva neodređenog integrala:

1. Konstanta podintegralne funkcije može se izlučiti ispred znaka integrala.

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

2. Integral sume funkcija jednak je sumi integrala tih funkcija.

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

Tablica osnovnih integrala

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C, \sin x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tgx} + C, \cos x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{1+x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{a^2+x^2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln \left| x \pm \sqrt{x^2-1} \right| + C, x > 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \left| x \pm \sqrt{x^2-a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a \neq 0$$

5.1.2 Metode integriranja

Neposredno ili direktno integriranje

Direktno ili neposredno integriranje je najjednostavnija metoda integriranja koja se sastoji od primjene osnovnih svojstava neodređenog integrala te tablice osnovnih integrala.

Primjer 5.1.1. Riješite integrale direktnim integriranjem:

(a) $\int (4x^3 - \cos x - 3) dx$
Rješenje:

$$\begin{aligned} \int (4x^3 - \cos x - 3) dx &= \int 4x^3 dx - \int \cos x dx - \int 3 dx = \\ &= 4 \int x^3 dx - \int \cos x dx - 3 \int dx = \\ &= 4 \cdot \frac{x^4}{4} + \sin x - 3x + C \\ &= x^4 + \sin x - 3x + C \end{aligned}$$

Provjera: $(x^4 + \sin x - 3x + C)' = 4x^3 - \cos x - 3$

(b) $\int (-6x + \frac{1}{x} + 2 \sin x) dx$
Rješenje:

$$\begin{aligned} \int (-6x + \frac{1}{x} + 2 \sin x) dx &= \int -6x dx + \int \frac{1}{x} dx + \int 2 \sin x dx = \\ &= -6 \int x dx + \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \sin x dx = \\ &= -6 \cdot \frac{x^2}{2} + \ln |x| - 2 \cos x + C = \\ &= -3x^2 + \ln |x| - 2 \cos x + C \end{aligned}$$

(c) $\int (3e^x + \sqrt{x} - 5^x) dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \int (3e^x + \sqrt{x} - 5^x) dx &= \int 3e^x dx + \int \sqrt{x} dx - \int 5^x dx = \\
 &= 3 \int e^x dx + \int \sqrt{x} dx - \int 5^x dx = \\
 &= 3e^x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{5^x}{\ln 5} + C \\
 &= 3e^x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\ln 5}5^x + C
 \end{aligned}$$

(d) $\int (\frac{5}{2\cos^2 x} - \frac{4}{x^2-1}) dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \int (\frac{5}{2\cos^2 x} - \frac{4}{x^2-1}) dx &= \int \frac{5}{2\cos^2 x} dx - \int \frac{4}{x^2-1} dx = \\
 &= \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} - 4 \int \frac{dx}{x^2-1} = \\
 &= \frac{5}{2} \operatorname{tg} x - 4 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{1+x} \right| + C \\
 &= \frac{5}{2} \operatorname{tg} x - 2 \ln \left| \frac{x-1}{1+x} \right| + C
 \end{aligned}$$

Primjer 5.1.2. Pojednostavnite podintegralnu funkciju i riješite integrale direktnim integriranjem:

(a) $\int \frac{x^2+4x+3}{x+1} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} &= \frac{(x + 3)(x + 1)}{x + 1} = x + 3 \\
 \int \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} dx &= \int (x + 3) dx = \frac{x^2}{2} + 3x + C
 \end{aligned}$$

(b) $\int \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2} &= \frac{(x-1)(x^2+2x+1)}{x^2} = \\
 &= \frac{x^3 + x^2 - 3x - 1}{x^2} = \\
 &= x^2 + 1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2} dx &= \int \left(x^2 + 1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \\
&= \int x^2 dx + \int dx - \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \\
&= \frac{x^3}{3} + x - 3 \ln |x| - \frac{x^{-1}}{-1} + C = \\
&= \frac{x^3}{3} + x - 3 \ln |x| + \frac{1}{x} + C
\end{aligned}$$

(c) $\int \frac{x^2}{x^2-4} dx$
Rješenje:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x^2-4} &= \frac{x^2-4+4}{x^2-4} = \frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4} = \\
&= 1 + \frac{4}{x^2-4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^2-4} dx &= \int \left(1 + \frac{4}{x^2-4}\right) dx = \\
&= \int dx + 4 \int \frac{1}{x^2-4} dx = \\
&= x + 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C = \\
&= x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C
\end{aligned}$$

(d) $\int \frac{3}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$
Rješenje:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} &= 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = 3 \cdot \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \\
&= 3 \cdot \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \right) = \\
&= 3 \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx &= \int 3 \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \\
&= 3 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + 3 \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \\
&= 3 \tan x + 3 \cot x + C
\end{aligned}$$

Metoda supstitucije ili zamjene

Metoda supstitucije koristi se kod rješavanja složenijih integrala odnosno onih integrala koji se ne mogu riješiti pomoću tablice osnovnih integrala. Stoga se uvodi supstitucija (zamjena) kojom bi se integral pojednostavnio na neki od osnovnih integrala. Dakle, ako nam je zadan integral

$$\int f(x) dx$$

uvodi se supstitucija

$$\begin{aligned} x &= \phi(t) \Rightarrow t = \Phi(x) \\ dx &= \phi'(t) \cdot dt \end{aligned}$$

Cilj supstitucije je da se dobije neprekidna derivabilna funkcija g ovisna o novoj varijabli t , čija se primitivna funkcija G nalazi u tablici osnovnih integrala.

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int g(t) dt = G(t) + C = G(\Phi(x)) + C$$

Napomena 5.1.1. Nakon uvođenja supstitucije svi x -evi te dx koji ulaze u integral trebaju se moći izraziti sa t odnosno dt . Ako tomu nije tako supstitucija ne vrijedi.

Primjer 5.1.3. Primjenom metode supstitucije riješite sljedeće integrale:

(a) $\int (x+4)^2 dx$
Rješenje:

$$\int (x+4)^2 dx = \left[\begin{array}{l} x+4=t \\ dx=dt \end{array} \right] = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x+4)^3}{3} + C$$

(b) $\int \sqrt{5-x} dx$
Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{5-x} dx &= \left[\begin{array}{l} 5-x=t \\ -dx=dt \end{array} \right] = \int -\sqrt{t} dt = - \int \sqrt{t} dt = \\ &= -\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} (5-x)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

(c) $\int \sin(3x + 1) dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \int \sin(3x + 1) dx &= \left[\begin{array}{l} 3x + 1 = t \\ 3dx = dt \end{array} \right] = \int \sin t \cdot \frac{dt}{3} \\
 &= \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + C = \\
 &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 1) + C
 \end{aligned}$$

(d) $\int 3e^{x-2} dx$

Rješenje:

$$\int 3e^{x-2} dx = \left[\begin{array}{l} x - 2 = t \\ dx = dt \end{array} \right] = \int 3e^t dt = 3e^t + C = 3e^{x-2} + C$$

(e) $\int 2e^{x^2+2} x dx$

Rješenje:

$$\int 2e^{x^2+2} x dx = \left[\begin{array}{l} x^2 + 2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right] = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2+2} + C$$

(f) $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2} dx &= \left[\begin{array}{l} x^3 + 1 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1}{3}}{t^2} dt = \frac{1}{3} \int t^{-2} dt = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{3} t^{-1} + C = \\
 &= -\frac{1}{3} (x^3 + 1)^{-1} + C = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3 + 1} + C
 \end{aligned}$$

(g) $\int \frac{x}{x^2+3} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{x^2 + 3} dx &= \left[\begin{array}{l} x^2 + 3 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1}{2}}{t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \ln |t| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln |x^2 + 3| + C
 \end{aligned}$$

(h) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx$
 Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx &= \left[\begin{array}{l} x+\sin x = t \\ (1+\cos x)dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \\ &= \ln |x+\sin x| + C \end{aligned}$$

(i) $\int \frac{e^x+2x}{e^x+x^2} dx$
 Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x+2x}{e^x+x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} e^x+x^2 = t \\ (e^x+2x)dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \\ &= \ln |e^x+x^2| + C \end{aligned}$$

(j) $\int (4x+1)\sqrt{2x^2+x-1} dx$
 Rješenje:

$$\begin{aligned} \int (4x+1)\sqrt{2x^2+x-1} dx &= \left[\begin{array}{l} 2x^2+x-1 = t \\ (4x+1)dx = dt \end{array} \right] \\ &= \int \sqrt{t} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{3}(2x^2+x-1)^{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{(2x^2+x-1)^3} + C \end{aligned}$$

(k) $\int e^{\sin x+\cos x} (\cos x - \sin x) dx$
 Rješenje:

$$\begin{aligned} \int e^{\sin x+\cos x} (\cos x - \sin x) dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sin x + \cos x \\ dt = (\cos x - \sin x) dx \end{array} \right] = \\ &= \int e^t dt = e^t + C = \\ &= e^{\sin x+\cos x} + C \end{aligned}$$

(l) $\int \sin (\sin^2 x + 1) \cdot \sin x \cdot \cos x dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \sin(\sin^2 x + 1) \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sin^2(x) + 1 \\ dt = 2 \sin x \cos x \, dx \\ \frac{1}{2} dt = \sin x \cos x \, dx \end{array} \right] = \\ &= \int \sin t \frac{1}{2} \, dt = \frac{1}{2} \int \sin t \, dt = \\ &= -\frac{1}{2} \cos t + C = \\ &= -\frac{1}{2} \cos(\sin^2 x + 1) + C \end{aligned}$$

Metoda parcijalne integracije

Metoda parcijalne integracije koristi se pri rješavanju složenijih zadataka kod kojih se ne može koristiti direktno integriranje pri pronalaženju primitivne funkcije. Primjenom metode parcijalne integracije omogućava se rješavanje jednostavnijeg integrala od onog zadanog. Formula parcijalne integracije:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Navedena metoda dobivena je na temelju diferencijala produkta dviju funkcija

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$

Integriranjem navedene formule derivacije produkta dobije se formula parcijalne integracije:

$$\begin{aligned} \int d(u \cdot v) &= \int du \cdot v + \int u \, dv \\ u \cdot v &= \int v \, du + \int u \, dv \\ \int u \, dv &= uv - \int v \, du \end{aligned}$$

Traženje integrala $\int u \, dv$ svodi se na rješavanje jednostavnijeg integrala $\int v \, du$. Ponekad je pri pronalasku traženog integrala potrebno i više puta primijeniti metodu parcijalne integracije. Također, pri rješavanju zadanog integrala može se dogoditi da se višestrukom primjenom metode parcijalne integracije ponovno dobije zadani integral. Metoda parcijalne integracije najčešće se koristi ako je podintegralna funkcija zadana kao produkt funkcija, logaritamska funkcija, arcus funkcija i sl. Konstanta C piše se nakon završetka integriranja.

Rješavanje integrala kod kojih je podintegralna funkcija zadana kao produkt funkcija, od kojih je jedna funkcija polinom, prikazano je sljedećim primjerom.

Primjer 5.1.4. Primjenom metode parcijalne integracije riješite sljedeće integrale:

(a) $\int x \cdot e^x dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = e^x dx \implies v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right] = \\ &= x \cdot e^x - \int e^x dx = \\ &= x \cdot e^x - e^x + C \end{aligned}$$

(b) $\int x^2 \cdot e^x dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot e^x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \implies du = 2x dx \\ dv = e^x dx \implies v = e^x \end{array} \right] = \\ &= x^2 \cdot e^x - \int 2xe^x dx \end{aligned}$$

U prethodnom zadatku je riješen $\int x \cdot e^x dx$ stoga je konačno rješenje

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2(x \cdot e^x - e^x) + C = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C$$

(c) $\int (x^2 - 2) \cdot e^x dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2) \cdot e^x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 - 2 \implies du = 2x dx \\ dv = e^x dx \implies v = e^x \end{array} \right] = \\ &= (x^2 - 2) \cdot e^x - \int 2xe^x dx \end{aligned}$$

U prethodnom zadatku je riješen $\int x \cdot e^x dx$ stoga je konačno rješenje

$$\int (x^2 - 2) \cdot e^x dx = (x^2 - 2) \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C$$

(d) $\int x \cdot e^{3x} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{3x} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = e^{3x} dx \implies v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right] = x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} dx = \\ &= \frac{1}{3}x \cdot e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{1}{3}x \cdot e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C \end{aligned}$$

(e) $\int (x+1) \cdot e^{x+1} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int (x+1) \cdot e^{x+1} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x+1 \implies du = dx \\ dv = e^{x+1} dx \implies v = e^{x+1} \end{array} \right] \\ &= (x+1) \cdot e^{x+1} - \int e^{x+1} dx = \\ &= (x+1) \cdot e^{x+1} - e^{x+1} + C \end{aligned}$$

(f) $\int x \cdot \sin x dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \sin x \cdot dx \implies v = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x dx = \\ &= -x \cdot \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

(g) $\int (x^2+3) \cdot \cos x dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int (x^2+3) \cdot \cos x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2+3 \implies du = 2x dx \\ dv = \cos x \cdot dx \implies v = \sin x \end{array} \right] = \\ &= (x^2+3) \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx = \\ &= (x^2+3) \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x dx \end{aligned}$$

U prethodnom zadatku je riješen $\int x \cdot \sin x dx$ stoga je konačno rješenje

$$\begin{aligned} \int (x^2+3) \cdot \cos x dx &= (x^2+3) \cdot \sin x - 2 \cdot (-x \cdot \cos x + \sin x) + C = \\ &= x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x + \sin x + C = \\ &= (x^2+1) \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x + C \end{aligned}$$

(h) $\int (x^2 + 4x - 2) \cdot \sin x \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int (x^2 + 4x - 2) \cdot \sin x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 + 4x - 2 \implies du = (2x + 4)dx \\ dv = \sin x \cdot dx \implies v = -\cos x \end{array} \right] = \\
&= (x^2 + 4x - 2) \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot (2x + 4) \, dx = \\
&= -(x^2 + 4x - 2) \cdot \cos x + \int (2x + 4) \cdot \cos x \, dx =
\end{aligned}$$

Na $\int (2x + 4) \cdot \cos x \, dx$ primjeni se još jednom metoda parcijalne integracije

$$\begin{aligned}
\int (2x + 4) \cdot \cos x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = 2x + 4 \implies du = 2dx \\ dv = \cos x \cdot dx \implies v = \sin x \end{array} \right] = \\
&= (2x + 4) \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2 \, dx = \\
&= (2x + 4) \cdot \sin x - 2(-\cos x) + C = \\
&= (2x + 4) \cdot \sin x + 2 \cos x + C
\end{aligned}$$

Prema tome, konačno rješenje glasi

$$\begin{aligned}
&= -(x^2 + 4x - 2) \cos x + [(2x + 4) \sin x + 2 \cos x] + C \\
&= (-x^2 - 4x + 4) \cos x + (2x + 4) \sin x + 2 \cos x + C
\end{aligned}$$

(i) $\int 5x (\sin x + \cos x) \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int 5x (\sin x + \cos x) \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = 5x \\ dv = (\sin x + \cos x) \, dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = 5dx \\ v = -\cos x + \sin x \end{array} \right] \\
&= 5x (\sin x - \cos x) + 5 \int (\sin x - \cos x) \, dx = \\
&= 5x (\sin x - \cos x) - 5(\cos x + \sin x) + C
\end{aligned}$$

U sljedećem primjeru prikazano je rješavanje integrala metodom parcijalne integracije kod kojih je podintegralna funkcija zadana kao logaritamska funkcija odnosno kao produkt funkcija - polinoma i logaritamske funkcije.

Primjer 5.1.5. Riješite sljedeće integrale primjenom metode parcijalne integracije:

(a) $\int \ln x \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C \end{aligned}$$

(b) $\int x \cdot \ln x \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \implies v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C \end{aligned}$$

(c) $\int \ln^2 x \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \ln^2 x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln^2 x \implies du = 2 \ln x \cdot dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] = \\ &= x \cdot \ln^2 x - \int 2x \ln x \, dx \end{aligned}$$

U prethodnom zadatku je riješen $\int x \cdot \ln x \, dx$ stoga je konačno rješenje

$$\int \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x - 2 \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right) + C = x \ln^2 x - x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^2 + C$$

(d) $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \ln x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \implies v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] = \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C \end{aligned}$$

(e) $\int (x^2 + 1) \cdot \ln x \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int (x^2 + 1) \cdot \ln x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = (x^2 + 1) dx \implies v = \frac{x^3}{3} + x \end{array} \right] = \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) \, dx = \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - x + C = \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x - \frac{1}{9} x^3 - x + C
\end{aligned}$$

(f) $\int (x^2 + 2x + 1) \cdot \ln x \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int (x^2 + 2x + 1) \cdot \ln x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = (x^2 + 2x + 1) dx \implies v = \frac{x^3}{3} + x^2 + x \end{array} \right] = \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + x + 1 \right) \, dx = \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + C = \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \ln x - \frac{1}{9} x^3 - \frac{x^2}{2} - x + C
\end{aligned}$$

Primjer 5.1.6. prikazuje rješavanje integrala metodom parcijalne integracije kod kojih je podintegralna funkcija zadana kao arcus funkcija odnosno kao produkt funkcija - polinoma i arcus funkcije.

Primjer 5.1.6. Metodom parcijalne integracije riješite sljedeće integrale:

(a) $\int \arctan x \, dx$ Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int \arctan x \cdot dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arctan x \implies du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] = \\
&= x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx
\end{aligned}$$

Primjenom metode supstitucije

$$\begin{aligned}\int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx &= \int \frac{x}{1+x^2} dx = \left[1+x^2 = t \right] = \int \frac{\frac{1}{2}}{t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C\end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenog integrala

$$\int \arctan x dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

(b) $\int (x^2 + \frac{1}{3}) \cdot \arctan x dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + \frac{1}{3}) \cdot \arctan x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arctan x \implies du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = (x^2 + \frac{1}{3}) dx \implies v = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x \end{array} \right] = \\ &= (\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x) \arctan x - \int (\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x) \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= (\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x) \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 + x}{1+x^2} dx = \\ &= (\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x) \arctan x - \frac{1}{3} \int x dx = \\ &= (\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x) \arctan x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \\ &= (\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x) \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + C\end{aligned}$$

(c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x dx$

Rješenje:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x dx = \left[\begin{array}{l} u = \arccos x \implies du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \implies v = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{array} \right] =$$

Primjenom metode supstitucije

$$\begin{aligned}v &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[1-x^2 = t \right] = \int \frac{\frac{dt}{-2}}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \\ &= -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u polaznu formulu parcijalne integracije

$$\begin{aligned}&= -\sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x - \int (-\sqrt{1-x^2}) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) dx = \\ &= \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x - x + C\end{aligned}$$

Integriranje racionalnih funkcija

Racionalne funkcije mogu biti prave racionalne funkcije i one koje nisu prave racionalne funkcije. Prave racionalne funkcije su funkcije kod kojih je stupanj polinoma brojnika manji od stupnja polinoma nazivnika,

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, m < n$$

dok je kod racionalnih funkcija koje nisu prave obrnuto. Stoga se racionalne funkcije koje nisu prave mogu svesti na sumu polinoma i prave racionalne funkcije. Prave jednostavne racionalne funkcije koje će se u ovom udžbeniku promatrati su oblika:

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^n}, \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}, \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$, $A, B, a, b \in \mathbb{R}$, a polinom $x^2 + ax + b$ nema realnih nultočaka (diskriminanta je manja od nule, tj. $a^2 - 4b < 0$).

Integral prave racionalne funkcije $\int \frac{A}{x-a} dx$ dan je formulom:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = \left[\frac{x-a=t}{dx=dt} \right] = A \ln |x-a| + C$$

Primjer 5.1.7. Primjenom gore navedene formule riješite sljedeće integrale:

(a) $\int \frac{2}{x-3} dx$
Rješenje:

$$\int \frac{2}{x-3} dx = 2 \ln |x-3| + C$$

(b) $\int \frac{dx}{x+5}$
Rješenje:

$$\int \frac{dx}{x+5} = \ln |x+5| + C$$

(c) $\int \frac{dx}{3x-1}$
Rješenje:

$$\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3} \ln |3x-1| + C$$

- (d) $\int \frac{3}{5-2x} dx$
 Rješenje:

$$\int \frac{3}{5-2x} dx = -\frac{3}{2} \ln |5-2x| + C$$

Integral prave racionalne funkcije $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx$ dan je formulom:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \left[\begin{array}{l} x-a=t \\ dx=dt \end{array} \right] = -\frac{A}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C, n \geq 2$$

Primjer 5.1.8. Primjenom gore navedene formule riješite sljedeće integrale:

- (a) $\int \frac{dx}{(x+4)^5}$
 Rješenje:

$$\int \frac{dx}{(x+4)^5} = -\frac{1}{5-1} \cdot \frac{1}{(x+4)^{5-1}} + C = -\frac{1}{4(x+4)^4} + C$$

- (b) $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$
 Rješenje:

$$\int \frac{dx}{(2x-1)^4} = -\frac{\frac{1}{2}}{4-1} \cdot \frac{1}{(2x-1)^{4-1}} + C = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(2x-1)^3} + C$$

- (c) $\int \frac{3}{(x-2)^5} dx$
 Rješenje:

$$\int \frac{3}{(x-2)^5} dx = -\frac{3}{5-1} \cdot \frac{1}{(x-2)^{5-1}} + C = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(x-2)^4} + C$$

Integrali racionalnih funkcija $\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b} dx$ i $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n} dx$ se rješavaju na način da je najprije nazivnik x^2+ax+b potrebno svesti na potpuni kvadrat binoma

$$x^2+ax+b = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{a^2}{4}\right)$$

gdje se uvođenjem supstitucije

$$t = x + \frac{a}{2}, dt = dx$$

brojnik $Ax+B$ pokuša izraziti preko derivacije nazivnika.

Primjer 5.1.9. Riješite sljedeće integrale oblika

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} dx$$

(a) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$
Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} &= \int \frac{dx}{(x + \frac{2}{2})^2 + (-3 - \frac{2^2}{4})} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 - 4} = \\ &= \left[\begin{array}{l} x + 1 = t \\ dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \ln \left| \frac{t - 2}{t + 2} \right| + C = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{x + 1 - 2}{x + 1 + 2} \right| + C = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{x - 1}{x + 3} \right| + C \end{aligned}$$

(b) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$
Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} &= \int \frac{dx}{(x + \frac{4}{2})^2 + (13 - \frac{4^2}{4})} = \\ &= \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 9} = \left[\begin{array}{l} x + 2 = t \\ dx = dt \end{array} \right] \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 9} = \frac{1}{3} \cdot \arctan \frac{t}{3} + C = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \arctan \frac{x + 2}{3} + C \end{aligned}$$

(c) $\int \frac{dx}{3x^2 - 6x + 15}$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{3x^2 - 6x + 15} &= \int \frac{dx}{3(x^2 - 2x + 5)} = \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x + \frac{-2}{2})^2 + (5 - \frac{(-2)^2}{4})} = \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 4} = \left[\begin{array}{l} x - 1 = t \\ dx = dt \end{array} \right] = \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \arctan \frac{t}{2} + C = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \arctan \frac{x - 1}{2} + C
 \end{aligned}$$

(d) $\int \frac{x}{x^2 - 2x - 8} dx$
Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{x^2 - 2x - 8} dx &= \int \frac{x}{(x + \frac{-2}{2})^2 + (-8 - \frac{(-2)^2}{4})} dx = \\
 &= \int \frac{x}{(x - 1)^2 - 9} dx = \left[\begin{array}{l} x - 1 = t \\ dx = dt \end{array} \right] \\
 &= \int \frac{t + 1}{t^2 - 9} dt = \\
 &= \int \frac{t}{t^2 - 9} dt + \int \frac{1}{t^2 - 9} dt
 \end{aligned}$$

Prvi integral se riješi pomoću metode supstitucije

$$\begin{aligned}
 \int \frac{t}{t^2 - 9} dt &= \left[\begin{array}{l} t^2 - 9 = u \\ 2t dt = du \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} = \frac{1}{2} \cdot \ln |u| + C \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \ln |t^2 - 9| + C =
 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u polazni integral

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{x^2 - 2x - 8} dx &= \frac{1}{2} \cdot \ln |t^2 - 9| + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \ln \left| \frac{t - 3}{t + 3} \right| + C = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \ln |(x - 1)^2 - 9| + \frac{1}{6} \cdot \ln \left| \frac{(x - 1) - 3}{(x - 1) + 3} \right| + C = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \ln |x^2 - 2x - 8| + \frac{1}{6} \cdot \ln \left| \frac{x - 4}{x + 2} \right| + C
 \end{aligned}$$

(e) $\int \frac{x+1}{2x^2+4x+4} dx$
 Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+1}{2x^2+4x+4} dx &= \int \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{(x+\frac{2}{2})^2 + (2-\frac{(2)^2}{4})} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{(x+1)^2+1} dx = \left[\frac{x+1=t}{dx=dt} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{t}{t^2+1} dt = \left[\frac{t^2+1=u}{2tdt=du} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln |u| + C = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \ln |t^2+1| + C = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \ln |(x+1)^2+1| + C \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \ln |x^2+2x+2| + C
 \end{aligned}$$

Primjer 5.1.10. Riješite sljedeće integrale oblika

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n} dx$$

koristeći formulu:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$I_n = \frac{1}{2 \cdot (n-1) \cdot a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2(n-1)-1}{2(n-1) \cdot a^2} \cdot I_{n-1}$$

(a) $\int \frac{x}{(x^2+4x+8)^2} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{(x^2 + 4x + 8)^2} dx &= \int \frac{x}{[(x + \frac{4}{2})^2 + (8 - \frac{4^2}{4})]^2} dx = \\
 &= \int \frac{x}{[(x + 2)^2 + 4]^2} dx = \left[\begin{array}{l} x + 2 = t \\ dx = dt \end{array} \right] = \\
 &= \int \frac{t - 2}{(t^2 + 4)^2} dt = \\
 &= \int \frac{t}{(t^2 + 4)^2} dt - 2 \int \frac{dt}{(t^2 + 4)^2}
 \end{aligned}$$

Prvi integral se riješi pomoću metode supstitucije

$$\begin{aligned}
 \int \frac{t}{(t^2 + 4)^2} dt &= \left[\begin{array}{l} t^2 + 4 = u \\ 2t dt = du \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1}{2} du}{u^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + C = \\
 &= -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(t^2 + 4)} + C
 \end{aligned}$$

Na drugi integral se primjeni gore navedena formula

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 4)^2} = I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2 \cdot (2 - 1) \cdot 2^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + 2^2)^{2-1}} + \frac{2(2 - 1) - 1}{2(2 - 1) \cdot 2^2} \cdot I_{2-1}$$

$$I_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{t}{t^2 + 4} + \frac{1}{8} \cdot I_1$$

gdje je I_1 jednak

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \frac{t}{2} + C$$

stoga je

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{t}{t^2 + 4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \arctan \frac{t}{2} + C \\
 I_2 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{t}{t^2 + 4} + \frac{1}{16} \cdot \arctan \frac{t}{2} + C
 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u polazni integral

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{(x^2 + 4x + 8)^2} dx &= -\frac{1}{2(t^2 + 4)} - 2 \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{t}{t^2 + 4} + \frac{1}{16} \cdot \arctan \frac{t}{2} \right] + C = \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2 + 4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{t}{t^2 + 4} - \frac{1}{8} \cdot \arctan \frac{t}{2} + C = \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+2)^2 + 4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x+2}{(x+2)^2 + 4} - \\
 &\quad - \frac{1}{8} \cdot \arctan \frac{x+2}{2} + C = \\
 &= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}}{x^2 + 4x + 8} - \frac{1}{8} \cdot \arctan \frac{x+2}{2} + C = \\
 &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{4+x}{x^2 + 4x + 8} - \frac{1}{8} \cdot \arctan \frac{x+2}{2} + C
 \end{aligned}$$

(b) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x+5)^2} dx$
 Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+3}{(x^2+6x+5)^2} dx &= \int \frac{x+3}{[(x+\frac{6}{2})^2 + (5-\frac{6^2}{4})]^2} dx = \\
 &= \int \frac{x+3}{[(x+3)^2 - 4]^2} dx = \left[\begin{matrix} x+3=t \\ dx=dt \end{matrix} \right] = \\
 &= \int \frac{t}{(t^2-4)^2} dt = \left[\begin{matrix} t^2-4=u \\ 2t dt=du \end{matrix} \right] \\
 &= \int \frac{\frac{1}{2} du}{u^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + C = \\
 &= -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(t^2-4)} + C = \\
 &= -\frac{1}{2((x+3)^2-4)} + C = \\
 &= -\frac{1}{2(x^2+6x+5)} + C
 \end{aligned}$$

Neka je racionalna funkcija $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ pri čemu se polinom nazivnika $Q_n(x)$ može prikazati u obliku

$$Q_n(x) = (x - x_1)^l \cdot (x - x_2)^k \cdot \dots \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^r \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^s \cdot \dots$$

Tada se funkcija $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ može rastaviti na zbroj parcijalnih razlomaka

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_l}{(x-x_1)^l} + \\ &+ \frac{B_1}{x-x_2} + \dots + \frac{B_k}{(x-x_2)^k} + \dots + \\ &+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{C_rx+D_r}{(x^2+p_1x+q_1)^r} + \\ &+ \frac{E_1x+F_1}{x^2+p_2x+q_2} + \dots + \frac{E_sx+F_s}{(x^2+p_2x+q_2)^s} + \dots \end{aligned}$$

gdje su $A_1, A_2, \dots, A_l, B_1, B_2, \dots, B_k, C_1, C_2, \dots, C_r, D_1, D_2, \dots, D_r, E_1, E_2, \dots, E_s, F_1, F_2, \dots, F_s$ konstante koje se računaju metodom neodređenih koeficijenata.

Primjer 5.1.11. Riješite sljedeće integrale rastavom na parcijalne razlomke:

(a) $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$

Rješenje:

Polinom nazivnika može se napisati u obliku

$$x^2 + x - 2 = x^2 + 2x - x - 2 = (x-1)(x+2)$$

prema tome rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke glasi

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+x-2} &= \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \\ &= \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{x(A+B) + 2A - B}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

Metodom neodređenih koeficijenata slijedi

$$\begin{aligned} (x) \dots \dots \dots 0 &= A + B \\ (1) \dots \dots \dots 1 &= 2A - B \end{aligned}$$

Iz čega proizlazi da je

$$A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 + x - 2} &= \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2} \right) dx = \\
&= \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1} dx - \int \frac{\frac{1}{3}}{x+2} dx = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{3} \cdot \ln|x+2| + C \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C
\end{aligned}$$

(b) $\int \frac{x-10}{x^3-3x^2+4} dx$

Rješenje:

Polinom nazivnika može se napisati u obliku

$$\begin{aligned}
x^3 - 3x^2 + 4 &= x^3 + x^2 - 4x^2 + 4 = x^2(x+1) - 4(x^2-1) = \\
&= x^2(x+1) - 4(x+1)(x-1) = (x+1)(x^2-4x+4) = \\
&= (x+1)(x-2)^2
\end{aligned}$$

prema tome rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke glasi

$$\begin{aligned}
\frac{x-10}{x^3-3x^2+4} &= \frac{x-10}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \\
&= \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2} \\
&= \frac{(A+B)x^2 + (-4A-B+C)x + 4A-2B+C}{(x+1)(x-2)^2}
\end{aligned}$$

Metodom neodređenih koeficijenata slijedi

$$\begin{aligned}
(x^2) \dots 0 &= A + B \\
(x) \dots 1 &= -4A - B + C \\
(1) \dots -10 &= 4A - 2B + C
\end{aligned}$$

Iz čega proizlazi da je

$$A = 1, B = -1, C = 4$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-10}{x^3-3x^2+4} dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx = \\
&= \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{4}{(x-2)^2} dx = \\
&= \ln|x+1| - \ln|x-2| - 4 \cdot \frac{1}{x-2} + C
\end{aligned}$$

(c) $\int \frac{x^2+3}{x^3+x} dx$

Rješenje:

Polinom nazivnika može se napisati u obliku

$$x^3 + x = x(x^2 + 1)$$

prema tome rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke glasi

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3}{x^3 + x} &= \frac{x^2 + 3}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \\ &= \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 1)} \\ &= \frac{(A + B)x^2 + Cx + A}{x(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Metodom neodređenih koeficijenata slijedi

$$(x^2) \dots 1 = A + B$$

$$(x) \dots 0 = C$$

$$(1) \dots 3 = A$$

Iz čega proizlazi da je

$$A = 3, B = -2, C = 0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 3}{x^3 + x} dx &= \int \left(\frac{3}{x} + \frac{-2x}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \\ &= 3 \ln |x| - \ln |x^2 + 1| + C \\ &= \ln \left| \frac{x^3}{x^2 + 1} \right| + C \end{aligned}$$

(d) $\int \frac{-x^3-13x-20}{(x-1)(x^2+4)^2} dx$

Rješenje:

Rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke glasi

$$\frac{-x^3 - 13x - 20}{(x - 1)(x^2 + 4)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 4)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A(x^2 + 4)^2 + (Bx + C)(x - 1)(x^2 + 4) + (Dx + E)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 4)^2} \\
&= \frac{(A + B)x^4 + (C - B)x^3 + (8A + 4B - C + D)x^2 +}{(x - 1)(x^2 + 4)^2} + \\
&+ \frac{(-4B - 4C - D + E)x + 16A - 4C - E}{(x - 1)(x^2 + 4)^2}
\end{aligned}$$

Metodom neodređenih koeficijenata slijedi

$$\begin{aligned}
(x^4) \dots 0 &= A + B \\
(x^3) \dots -1 &= C - B \\
(x^2) \dots 0 &= 8A + 4B - C + D \\
(x) \dots -13 &= -4B - 4C - D + E \\
(1) \dots -20 &= 16A - 4C - E
\end{aligned}$$

Iz čega proizlazi da je

$$A = -1, B = 1, C = 0, D = 5, E = 0$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{-x^3 - 13x - 20}{(x - 1)(x^2 + 4)^2} dx &= \int \left(\frac{-1}{x - 1} + \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{5x}{(x^2 + 4)^2} \right) dx = \\
&= \int \frac{-1}{x - 1} dx + \int \frac{x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{5x}{(x^2 + 4)^2} dx = \\
&= -\ln|x - 1| + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 4} + C
\end{aligned}$$

Integriranje trigonometrijskih funkcija

U ovom potpoglavlju pokazati će se izračunavanje integrala nekih oblika trigonometrijskih funkcija.

1. Integrali oblika

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

gdje su m i n cijeli pozitivni brojevi rješavaju se na sljedeći način:

a) ako je $m = 2k + 1$ neparan pozitivni broj

Tada se integral može zapisati kao

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x \cos^n x dx &= - \int \sin^{2k} x \cos^n x d(\cos x) = \\
&= - \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x)
\end{aligned}$$

b) ako je $n = 2k + 1$ neparan pozitivni broj

Tada se integral može zapisati kao

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x dx &= - \int \sin^m x \cos^{2k} x d(\sin x) = \\ &= - \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d(\sin x)\end{aligned}$$

c) ako su m i n parni pozitivni brojevi

Tada se podintegralna funkcija transformira pomoću formula:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Primjer 5.1.12. Pomoću gore navedenih formula riješite integral oblika

$$\int \sin^4 4x \cos^2 4x dx$$

Rješenje:

m i n su parni pozitivni brojevi stoga koristimo formule pod c)

$$\begin{aligned}\int \sin^4 4x \cos^2 4x dx &= \int (\sin^2 4x \cos^2 4x) \sin^2 4x dx = \\ &= \int \frac{1}{2} \sin^2 8x \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 8x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \sin^2 8x dx - \frac{1}{4} \int \sin^2 8x \cos 8x dx\end{aligned}$$

Prvi integral je jednak

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \int \sin^2 8x dx &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 16x) dx = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \sin 16x + C = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{64} \sin 16x + C\end{aligned}$$

Kod drugog integrala n je neparan pozitivni broj stoga koristimo formulu pod b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \int \sin^2 8x \cos 8x dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 8x d(\sin x) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin^3 8x}{3} + C = \\ &= \frac{1}{96} \sin^3 8x + C\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u polazni integral

$$\int \sin^4 4x \cos^2 4x dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{64} \sin 16x - \frac{1}{96} \sin^3 8x + C$$

2. Integrali oblika

$$\int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \cos nx dx$$

rješavaju se na način da se podintegralna funkcija transformira pomoću formula:

$$\begin{aligned}\sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] \\ \sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \\ \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\end{aligned}$$

Primjer 5.1.13. Pomoću gore navedenih formula riješite integral oblika

$$\int \sin 5x \cos 4x dx$$

Rješenje:

Podintegralna funkcija može se zapisati u obliku

$$\sin 5x \cos 4x = \frac{1}{2}[\sin(5+4)x + \sin(5-4)x] = \frac{1}{2}[\sin 9x + \sin x]$$

$$\begin{aligned}\int \sin 5x \cos 4x dx &= \int \frac{1}{2}[\sin 9x + \sin x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int [\sin 9x + \sin x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot (-\cos 9x) + \frac{1}{2} \cdot (-\cos x) + C = \\ &= -\frac{1}{18} \cos 9x - \frac{1}{2} \cos x + C\end{aligned}$$

3. Integrali oblika

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

gdje je R racionalna funkcija, rješavaju se supstitucijom i to na sljedeći način:

a) univerzalna supstitucija :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= t \Rightarrow x = 2 \arctan t \\ dx &= \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

b) podintegralna funkcija je neparna u $\sin x$

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \cos x = t$$

c) podintegralna funkcija je neparna u $\cos x$

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \sin x = t$$

d) podintegralna funkcija je parna i u $\sin x$ i u $\cos x$

$$\int R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

onda je supstitucija:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= t \Rightarrow x = \arctan t \\ dx &= \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x &= \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

Primjer 5.1.14. Pomoću gore navedenih formula supstitucije riješite integrale oblika

(a) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$
Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1 + \cos x} &= \left[\begin{array}{l} tg \frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \\
&= 2 \int \frac{dt}{2} = \int dt = \\
&= t + C = tg \frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

(b) $\int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$
Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx &= \left[\begin{array}{l} tg \frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 - \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \\
&= 4 \int \frac{\frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2}}{\frac{(1+t^2)^2 - (1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \\
&= 4 \int \frac{t dt}{4t^2} = \int \frac{dt}{t} = \\
&= \ln |t| + C = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C
\end{aligned}$$

4. Integrali oblika

$$\int R(\sin x) \cos x dx, \int R(\cos x) \sin x dx$$

rješavaju se supstitucijom i to na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\int R(\sin x) \cos x dx &\Rightarrow \sin x = t, \cos x dx = dt \\
\int R(\cos x) \sin x dx &\Rightarrow \cos x = t, -\sin x dx = dt
\end{aligned}$$

Primjer 5.1.15. Pomoću gore navedenih formula supstitucije riješite integrale oblika

(a) $\int \frac{1+\sin x}{\sin^2 x} \cos x \, dx$
Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \frac{1+\sin x}{\sin^2 x} \cos x \, dx &= \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{1+t}{t^2} \, dt = \\ &= \int \frac{1}{t^2} \, dt + \int \frac{t}{t^2} \, dt = \\ &= \frac{t^{-1}}{-1} + \ln |t| + C = \\ &= -\frac{1}{\sin x} + \ln |\sin x| + C \end{aligned}$$

(b) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx$
Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x \, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x \, dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{1-t^2}{t^2} (-dt) = \\ &= -\int \frac{1}{t^2} \, dt + \int dt = -\frac{t^{-1}}{-1} + t + C = \\ &= \frac{1}{\cos x} + \cos x + C = \frac{1+\cos^2 x}{\cos x} + C \end{aligned}$$

5. Integrali oblika

$$\int R(\operatorname{tg} x) \, dx, \int R(\operatorname{ctg} x) \, dx$$

rješavaju se supstitucijom i to na sljedeći način:

$$\int R(\operatorname{tg} x) dx \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \arctan t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right]$$

$$\int R(\operatorname{ctg} x) dx \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = t \Rightarrow x = \arctan t \\ dx = -\frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right]$$

Primjer 5.1.16. Pomoću gore navedenih formula supstitucije riješite integrale oblika

(a) $\int \operatorname{tg}(3x) dx$
Rješenje:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}(3x) dx &= \left[\begin{array}{l} 3x = z \\ 3dx = dz \end{array} \right] = \int \operatorname{tg} z \frac{dz}{3} = \frac{1}{3} \int \operatorname{tg} z dz = \\ &= \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} z = t \\ dz = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int t \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} \int \frac{t}{1+t^2} dt = \\ &= \left[\begin{array}{l} 1+t^2 = u \\ 2tdt = du \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{6} \int \frac{du}{u} = \\ &= \frac{1}{6} \ln |u| + C = \frac{1}{6} \ln |1+t^2| + C = \\ &= \frac{1}{6} \ln |1+\operatorname{tg}^2 z| + C = \frac{1}{6} \ln |1+\operatorname{tg}^2(3x)| + C \end{aligned}$$

(b) $\int \operatorname{ctg}(3x) dx$
Rješenje:

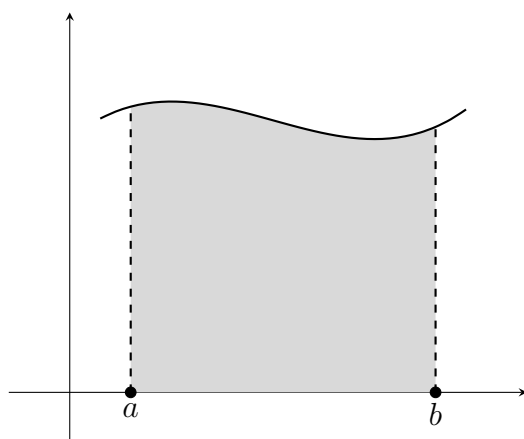
$$\begin{aligned}\int \operatorname{ctg}(3x) \, dx &= \left[\begin{array}{l} 3x = z \\ 3dx = dz \end{array} \right] = \int \operatorname{ctg} z \frac{dz}{3} = \frac{1}{3} \int \operatorname{ctg} z \, dz = \\ &= \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} z = t \\ dz = -\frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int t \frac{-dt}{1+t^2} = -\frac{1}{3} \int \frac{t}{1+t^2} \, dt = \\ &= \left[\begin{array}{l} 1+t^2 = u \\ 2t \, dt = du \end{array} \right] = -\frac{1}{3} \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = -\frac{1}{6} \int \frac{du}{u} = \\ &= -\frac{1}{6} \ln |u| + C = -\frac{1}{6} \ln |1+t^2| + C = \\ &= -\frac{1}{6} \ln |1+\operatorname{ctg}^2 z| + C = -\frac{1}{6} \ln |1+\operatorname{ctg}^2(3x)| + C\end{aligned}$$

5.2 Određeni integrali

Pojam određenog integrala uvodi se preko određivanja površine. Naime, pomoću elementarne geometrije računa se površina likova poput trokuta, četverokuta i sl. No, ako je u ravnini zadan lik omeđen krivuljom potrebno je računati njegovu površinu pomoću određenog integrala.

5.2.1 Pojam i osnovna svojstva određenog integrala

Neka je $y = f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$.

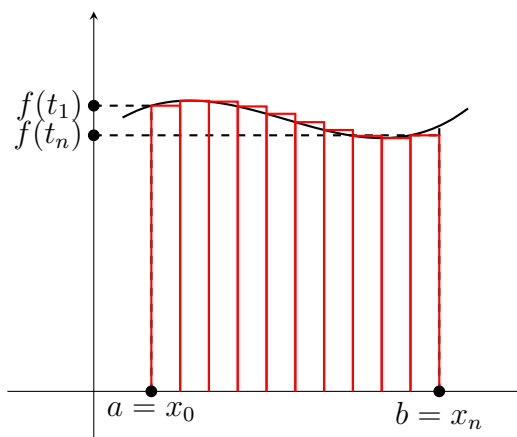


Graf funkcije f

Kako bi se dobila površina lika P omeđenog grafom funkcije $y = f(x) \geq 0$, intervalom $[a, b]$, pravcima $x = a$ i $x = b$ te osi x uvodi se pojam određenog integrala. Naime, ako se interval $[a, b]$ podijeli na n podintervala točkama

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

duljine podintervala su jednake $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ (gdje je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$). Ako se na svakom od podintervala odabere na proizvoljan način po jedna točka sa pripadajućim koordinatama $T_1(t_1, f(t_1)), T_2(t_2, f(t_2)), \dots, T_n(t_n, f(t_n))$



tada je površina pravokutnika kojeg zatvaraju stranice duljine Δx_i i $f(t_i)$ jednaka $P_i = f(t_i) \cdot \Delta x_i$, a tražena površina P jednaka je zbroju površina svih pravokutnika

$$P = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i$$

Navedena suma produkata duljine podintervala Δx_i i vrijednosti $f(t_i)$ naziva se **integralna suma** funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$. S obzirom da je interval $[a, b]$ moguće na bezbroj načina podijeliti na n podintervala, na kojima se na bezbroj načina mogu odabrati točke $T_1, T_2, \dots, T_n$ slijedi da integralna suma funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ nije jednoznačno određena. Ali, ako se interval podijeli na što veći broj intervala ($n \rightarrow \infty$) tada duljina svakog podintervala Δx_i teži k nuli i intuitivno je jasno da integralna suma aproksimira površinu P .

Odnosno, sve integralne sume jedne te iste funkcije $f(x)$ na istom intervalu $[a, b]$ imaju istu graničnu vrijednost kada $n \rightarrow \infty$ i tada duljina najvećeg od svih podintervala, $\max x_i$, teži k nuli. Taj se zajednički limes zove određenim integralom funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i$$

Interval $[a, b]$ zove se **područje integracije** gdje je a **donja granica integracije**, a b **gornja granica integracije**.

Dakle, geometrijski, određeni integral predstavlja površinu lika omeđenog krivuljom $y = f(x)$, osi apscisa i pravcima $x = a$ i $x = b$.

Osnovna svojstva određenog integrala

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, a < b$
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- ako je $c \in \langle a, b \rangle$ tada vrijedi: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- ako je na $[a, b]$

$$f(x) > 0 \Rightarrow \int_b^a f(x)dx \geq 0$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow \int_b^a f(x)dx \leq 0$$

- Za parne funkcije, odnosno neparne vrijedi:

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow \int_a^{-a} f(x)dx = 2 \int_a^0 f(x)dx$$

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \int_a^{-a} f(x)dx = 0$$

5.2.2 Računanje određenog integrala

Newton-Leibnizova formula

Osnovna formula izračunavanja određenog integrala je **Newton – Leibnizova formula**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Određeni integral računa se tako da se izračuna pripadajući neodređeni integral u koji se uvrsti najprije gornja granica od koje se oduzme donja granica.

Primjer 5.2.1. Riješite sljedeće integrale pomoću Newton - Leibnizove formule:

(a) $\int_{-2}^3 (3x - 2) dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 (3x - 2) dx &= \left(3\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-2}^3 = \\ &= \left(3\frac{3^2}{2} - 2 \cdot 3\right) - \left(3\frac{(-2)^2}{2} - 2 \cdot (-2)\right) = \\ &= \left(\frac{27}{2} - 6\right) - (6 + 4) = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

(b) $\int_{-1}^1 (5x^3 - 4x^2 + 3) dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (5x^3 - 4x^2 + 3) dx &= \left(5\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Big|_{-1}^1 = \\ &= \left(5\frac{1^4}{4} - 4\frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1\right) - \left(5\frac{(-1)^4}{4} - 4\frac{(-1)^3}{3} + 3 \cdot (-1)\right) = \\ &= \left(\frac{5}{4} - \frac{4}{3} + 3\right) - \left(\frac{5}{4} + \frac{4}{3} - 3\right) = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

(c) $\int_0^3 (e^x + 1) dx$

Rješenje:

$$\int_0^3 (e^x + 1) dx = (e^x + x)\Big|_0^3 = (e^3 + 3) - (e^0 + 0) = e^3 + 2$$

(d) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^4} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^4} dx &= \frac{1}{4-1} \cdot \frac{1}{(x+1)^{4-1}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^3}\Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+1)^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(0+1)^3} = -\frac{7}{24}\end{aligned}$$

(e) $\int_2^4 \frac{1}{x^2+2x-3} dx$

Rješenje:

Iz primjera 5.1.9.a)

$$\int \frac{1}{x^2+2x-3} dx = \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C$$

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{1}{x^2+2x-3} dx &= \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \Big|_2^4 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{4-1}{4+3} \right| - \frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{2-1}{2+3} \right| = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\ln \left| \frac{3}{7} \right| - \ln \left| \frac{1}{5} \right| \right) = \frac{1}{4} \cdot \ln \frac{15}{7} \end{aligned}$$

(f) $\int_3^4 \frac{x^2}{x^2-1} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{x^2}{x^2-1} dx &= \int_3^4 \left(1 + \frac{1}{x^2-1} \right) dx = \\ &= \left(x + \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \Big|_3^4 = \\ &= \left(4 + \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{4-1}{4+1} \right| \right) - \left(3 + \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{3-1}{3+1} \right| \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{6}{5} \end{aligned}$$

(g) $\int_1^4 \frac{1+x^2+\sqrt{x}}{x^2} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1+x^2+\sqrt{x}}{x^2} dx &= \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx + \int_1^4 \frac{x^2}{x^2} dx + \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = \\ &= \int_1^4 x^{-2} dx + \int_1^4 dx + \int_1^4 x^{-\frac{3}{2}} dx = \\ &= \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^4 + x \Big|_1^4 + \left(\frac{x^{-\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}} \right) \Big|_1^4 = \\ &= \left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) + (4-1) + \left(-\frac{2}{5} \cdot 4^{-\frac{5}{2}} - \left(-\frac{2}{5} \cdot 1^{-\frac{5}{2}} \right) \right) = \\ &= \frac{3}{4} + 3 + \left(-\frac{2}{5} \cdot 2^{-5} + \frac{2}{5} \right) = \frac{331}{80} = 4\frac{11}{80} \end{aligned}$$

(h) $\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2} dx$

Rješenje:

S obzirom da podintegralna funkcija $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ ima prekid u točki $x = 2$, $2 \in [1, 3]$ ne može se primijeniti Newton - Leibnizova formula.

(i) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx &= 2 \int_0^{\pi} |\sin x| dx = 2(-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \\ &= -2(\cos \pi - \cos 0) = -2(-1 - 1) = 4 \end{aligned}$$

Metoda supstitucije

Primjenom metode supstitucije kod računanja određenih integrala nužno je preračunavanje granica integriranja.

Primjer 5.2.2. Izračunajte sljedeće integrale primjenom metode supstitucije:

(a) $\int_{-1}^2 \sqrt{2+x} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \sqrt{2+x} dx &= \left[\begin{array}{l} 2+x=t \\ dx=dt \\ x=-1 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=4 \end{array} \right] = \int_1^4 \sqrt{t} dt = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^4 = \\ &= \frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3} \end{aligned}$$

(b) $\int_0^1 x e^{x^2+1} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{x^2+1} dx &= \left[\begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2x dx=dt \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{array} \right] = \int_1^2 \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} (e^t) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} (e^2 - e^1) = \frac{1}{2} e (e - 1) \end{aligned}$$

(c) $\int_0^1 e^x (e^x - 2) dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x (e^x - 2) dx &= \left[\begin{array}{l} e^x - 2 = t \\ e^x dx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = -1 \\ x = 1 \Rightarrow t = e - 2 \end{array} \right] = \int_{-1}^{e-2} t dt = \\ &= \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_{-1}^{e-2} = \frac{(e-2)^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}(e^2 - 2e + 3) \end{aligned}$$

(d) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx &= \left[\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \\ x = e \Rightarrow t = 1 \\ x = e^2 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right] = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = (\ln |t|) \Big|_1^2 \\ &= \ln |2| - \ln |1| = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \end{aligned}$$

(e) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx &= \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = t \\ 2x dx = dt \\ x = 2 \Rightarrow t = 3 \\ x = 3 \Rightarrow t = 8 \end{array} \right] = \int_3^8 \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} (\ln |t|) \Big|_3^8 \\ &= \frac{1}{2} (\ln |8| - \ln |3|) = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3} \end{aligned}$$

(f) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x dx}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x dx}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} &= \left[\begin{array}{l} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x dx \\ x = 0 \Rightarrow t = -1 \\ x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right] = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{-1}^1 \\ &= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi \end{aligned}$$

Metoda parcijalne integracije

$$\int_a^b u dv = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Primjer 5.2.3. Metodom parcijalne integracije izračunajte sljedeće integrale:

(a) $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \implies du = 2x dx \\ dv = \sin x dx \implies v = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= (-x^2 \cos x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi -2x \cos x \, dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \cos x dx \implies v = \sin x \end{array} \right] = \\ &= (-x^2 \cos x) \Big|_0^\pi + 2 \left[(x \sin x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx \right] = \\ &= (-x^2 \cos x) \Big|_0^\pi + 2 \left[(x \sin x) \Big|_0^\pi + (\cos x) \Big|_0^\pi \right] = \\ &= (-(\pi)^2 \cos \pi) + 2 [(\pi \sin \pi) + (\cos \pi)] - \\ &\quad - [(-0^2 \cos 0) + 2 [(0 \sin 0) + (\cos 0)]] = \\ &= \pi^2 + 2(0 - 1) - 2 \cdot 1 = \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 + x) \cos x \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 + x) \cos x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = 5 + x \implies du = dx \\ dv = \cos x dx \implies v = \sin x \end{array} \right] = \\ &= ((5 + x) \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \\ &= ((5 + x) \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - (\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left(\left(5 + \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right) - \\ &\quad - ((5 + 0) \sin 0 - \sin 0) = \\ &= 5 + \frac{\pi}{2} - 1 - 0 = 4 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(c) $\int_0^1 (x^2 - 1) e^x dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^2 - 1) e^x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 - 1 \implies du = 2x dx \\ dv = e^x dx \implies v = e^x \end{array} \right] = \\
&= [(x^2 - 1) e^x] \Big|_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = e^x dx \implies v = e^x \end{array} \right] = \\
&= [(x^2 - 1) e^x] \Big|_0^1 - 2 \left[(x e^x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right] = \\
&= [(x^2 - 1) e^x] \Big|_0^1 - 2 \left[(x e^x) \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 \right] = \\
&= [(1^2 - 1) e^1 - 2 \cdot (1 \cdot e^1) - 2e^1] - \\
&\quad - [(0^2 - 1) e^0 - 2 \cdot (0 \cdot e^0) - 2e^0] = \\
&= (-2e - 2e) - (-1 - 2) = -4e + 3
\end{aligned}$$

(d) $\int_1^3 (x + 1) \ln x dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 (x + 1) \ln x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = (x + 1) dx \implies v = \frac{x^2}{2} + x \end{array} \right] = \\
&= \left[\left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x \right] \Big|_1^3 - \int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \frac{1}{x} dx = \\
&= \left[\left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x \right] \Big|_1^3 - \left[\frac{x^2}{4} + x \right] \Big|_1^3 = \\
&= \left[\left(\frac{3^2}{2} + 3 \right) \ln 3 - \left(\frac{3^2}{4} + 3 \right) \right] - \\
&\quad - \left[\left(\frac{1^2}{2} + 1 \right) \ln 1 - \left(\frac{1^2}{4} + 1 \right) \right] = \\
&= \frac{15}{2} \ln 3 - \frac{21}{4} + \frac{5}{4} = \frac{15}{2} \ln 3 - 4
\end{aligned}$$

(e) $\int_1^e \ln x dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] = (x \cdot \ln x) \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = \\
&= (x \cdot \ln x) \Big|_1^e - x \Big|_1^e = (e \cdot \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = 1
\end{aligned}$$

- (f) $\int_0^1 \arctan x \, dx$
 Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \arctan x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arctan x \implies du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] = \\
 &= x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x=0 \implies t=1 \\ x=1 \implies t=2 \end{array} \right] \\
 &= x \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln |x| \Big|_1^2 = \\
 &= (1 \arctan 1 - 0 \arctan 0) - \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \\
 &= \arctan 1 - \frac{1}{2} (\ln 2 - 0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln 2
 \end{aligned}$$

- (g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$
 Rješenje:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \implies du = 2x dx \\ dv = \sin x dx \implies v = -\cos x \end{array} \right] = \\
 &= -x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x \, dx = \\
 &= \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \cos x dx \implies v = \sin x \end{array} \right] = \\
 &= -x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \left(x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \right) = \\
 &= -x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \left(-\frac{\pi^2}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 2 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cos \frac{\pi}{2} \right) - \\
 &= (-0^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + 2 \cos 0) = \\
 &= -\frac{\pi^2}{2} \cdot 0 + \pi \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = \pi - 2
 \end{aligned}$$

- (h) $\int_0^\pi e^x \sin x \, dx$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x \sin x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = e^x \implies du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \implies v = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= -e^x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cos x \, dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = e^x \implies du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \implies v = \sin x \end{array} \right] = \\ &= -e^x \cos x \Big|_0^\pi + e^x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin x \, dx\end{aligned}$$

Neka je $\int_0^\pi e^x \sin x \, dx = I$

$$\begin{aligned}I &= -e^x \cos x \Big|_0^\pi + e^x \sin x \Big|_0^\pi - I \\ 2I &= -e^x \cos x \Big|_0^\pi + e^x \sin x \Big|_0^\pi \\ 2I &= -(e^\pi \cos \pi - e^0 \cos 0) + (e^\pi \sin \pi - e^0 \sin 0) \\ 2I &= -(-e^\pi - 1) + (0 - 0) \\ 2I &= e^\pi + 1 / : 2 \\ I &= \frac{e^\pi + 1}{2} \implies \int_0^\pi e^x \sin x \, dx = \frac{e^\pi + 1}{2}\end{aligned}$$

5.3 Primjena određenog integrala

U ovom udžbeniku primjena određenog integrala se prikazuje u geometriji kao računanje površine lika u ravnini, duljine luka krivulje u ravnini, volumena rotacijskih tijela te u mehanici.

5.3.1 Primjena određenog integrala u geometriji

Računanje površine lika u ravnini

U prethodnom potpoglavlju se promatralo izračunavanje površine lika omeđenog krivuljom $y = f(x)$, osi apscisa i pravcima $x = a$ i $x = b$ pomoću određenog integrala:

$$P = \int_a^b f(x) \, dx$$

U ovom potpoglavlju izračunavati će se površina lika omeđenog pravcima $x = a$, $x = b$ i dvjema krivuljama, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, za koje vrijedi

$$f_1(x) \leq f_2(x) \text{ za } x \in [a, b]$$

Tada je površina jednaka

$$P = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

Primjer 5.3.1. Izračunajte površinu dijela ravnine omeđenog grafovima funkcija

$$y = x + 5$$

$$y = x^2 - 3x$$

Rješenje:

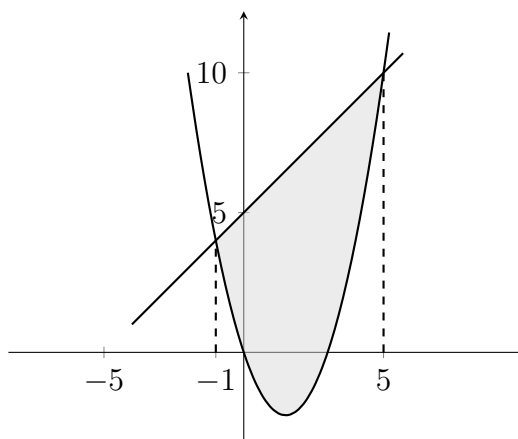
Kako bi odredili površinu lika omeđenog krivuljama najprije je potrebno skicirati funkcije:

Graf funkcije $y = x + 5$ je pravac kojem je dovoljno odrediti dvije točke:

x	0	1
y	5	6

Graf funkcije $y = x^2 - 3x$ je parabola koja je okrenuta prema gore i određena svojim nultočkama:

$$y = x^2 - 3x = x(x - 3) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$



Granice integrala su sjecišta funkcija:

$$x^2 - 3x = x + 5$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x + 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5$$

Površina je jednaka:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^5 [x + 5 - (x^2 - 3x)] dx = \int_{-1}^5 (-x^2 + 4x + 5) dx = \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_{-1}^5 = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \right) \Big|_{-1}^5 = 36 \end{aligned}$$

Primjer 5.3.2. Izračunajte površinu dijela ravnine omeđenog grafovima funkcija

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 - 4x \\ y &= x \end{aligned}$$

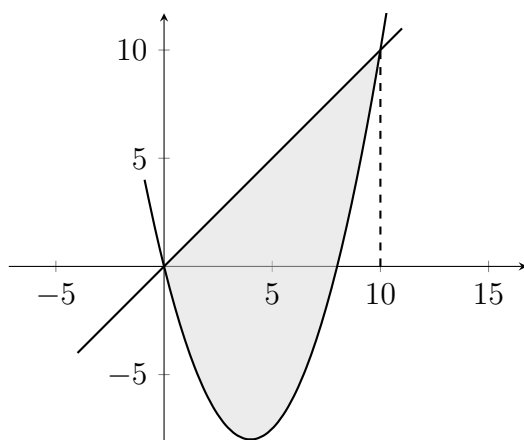
Rješenje:

Graf funkcije $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$ je parabola koja je okrenuta prema gore i određena svojim nultočkama:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x = x\left(\frac{1}{2}x - 4\right) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 8$$

Graf funkcije $y = x$ je pravac:

x	0	1
y	0	1



Granice integrala, odnosno sjecišta funkcija:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 - 4x &= x \\ \frac{1}{2}x^2 - 5x &= 0 \\ x\left(\frac{1}{2}x - 5\right) &= 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 10\end{aligned}$$

Površina je jednaka:

$$\begin{aligned}P &= \int_0^{10} \left[x - \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) \right] dx = \int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 5x \right) dx = \\ &= \left(-\frac{x^3}{6} + 5\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{10} = \frac{250}{3}\end{aligned}$$

Primjer 5.3.3. Izračunajte površinu dijela ravnine omeđenog grafovima funkcija

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 3x + 10 \\ y &= x + 2\end{aligned}$$

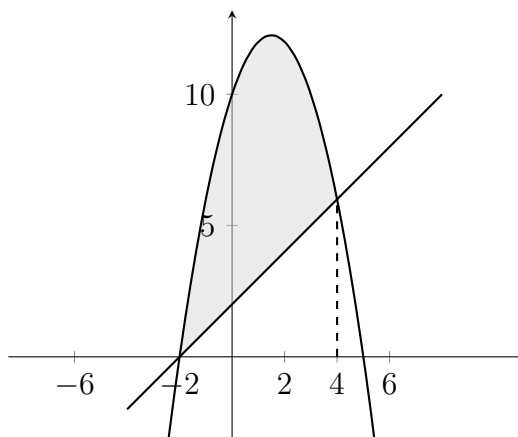
Rješenje:

Graf funkcije $y = -x^2 + 3x + 10$ je parabola koja je okrenuta prema dolje i određena svojim nultočkama:

$$y = -x^2 + 3x + 10 = (x - 5)(-x - 2) \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -2$$

Graf funkcije $y = x + 2$ je pravac:

x	0	1
y	2	3



Granice integrala:

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x + 10 &= x + 2 \\ x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ (x - 4)(x + 2) &= 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -2 \end{aligned}$$

Površina je jednaka:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^4 (-x^2 + 3x + 10 - (x + 2)) dx = \int_{-2}^4 (-x^2 + 2x + 8) dx = \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 8x \right) \Big|_{-2}^4 = 36 \end{aligned}$$

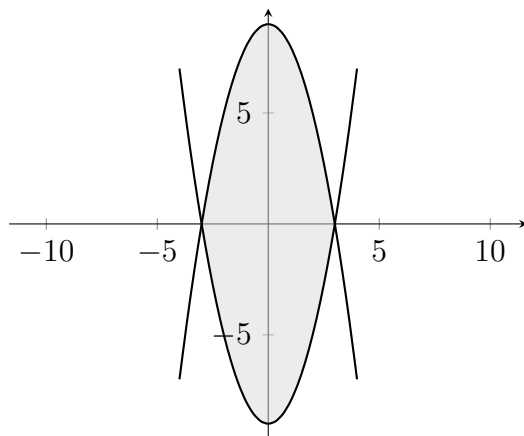
Primjer 5.3.4. Izračunajte površinu dijela ravnine omeđenog grafovima funkcija

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 9 \\ y &= x^2 - 9 \end{aligned}$$

Rješenje:

Graf zadanih funkcija je parabola:

$$\begin{aligned} y = -x^2 + 9 &= (3 - x)(3 + x) \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3 \\ y = x^2 - 9 &= (x - 3)(x + 3) \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3 \end{aligned}$$



Granice integrala:

$$\begin{aligned} -x^2 + 9 &= x^2 - 9 \\ 2x^2 - 18 &= 0 \\ 2(x - 3)(x + 3) &= 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3 \end{aligned}$$

Površina je jednaka:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-3}^3 [(-x^2 + 9) - (x^2 - 9)] \, dx = \int_{-3}^3 (-2x^2 + 18) \, dx = \\ &= \left(-2\frac{x^3}{3} + 18x \right) \Big|_{-3}^3 = 72 \end{aligned}$$

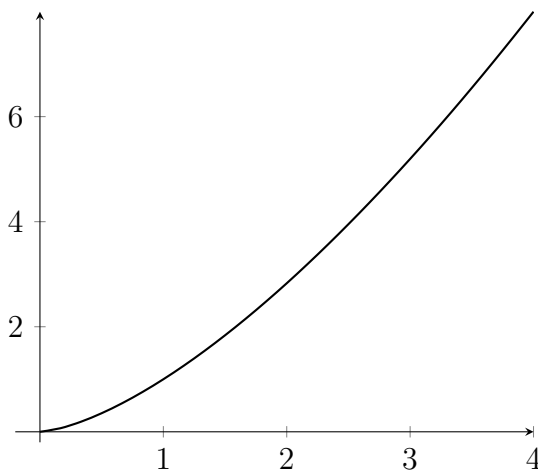
Izračunavanje duljine luka krivulje u ravnini

U ovom potpoglavlju obraditi će se duljina luka krivulje zadane u pravokutnim koordinatama i to u eksplicitnom obliku $y = f(x)$, odnosno $x = y(x)$.

Duljina luka krivulje $y = f(x)$ u ravnini između točaka $x = a$ i $x = b$ računa se pomoću određenog integrala

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx$$

Primjer 5.3.5. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \sqrt{x^3}$ od $x = 0$ do $x = 4$.
Rješenje:



$$\begin{aligned}
s &= \int_0^4 \sqrt{1 + (\sqrt{x^3})'^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \\
&= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{9}{4}x = t \\ \frac{9}{4}dx = dt \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = 4 \rightarrow t = 10 \end{array} \right] = \\
&= \frac{4}{9} \int_1^{10} \sqrt{t} dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} = \frac{8}{27} \left(10^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \\
&= \frac{8}{27} \left(\sqrt{10^3} - 1 \right) = 9,07
\end{aligned}$$

Primjer 5.3.6. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \ln(1 - x^2)$ od $x = 0$ do $x = \frac{1}{3}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + (\ln(1 - x^2))'^2} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1 - x^2}\right)^2} dx = \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{(1 - x^2)^2}} dx = \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1 + 2x^2 + x^4}{(1 - x^2)^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{(1 + x^2)^2}{(1 - x^2)^2}} dx = \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1 + (1 - 1) + x^2}{1 - x^2} dx = \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{1 - x^2} - \frac{1 - x^2}{1 - x^2} \right) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(2 \cdot \frac{1}{1 - x^2} - 1 \right) dx = \\
&= \left[2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| - x \right] \Big|_0^{\frac{1}{3}} = \left[\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \right] - [\ln 1 - 0] = \\
&= \ln 2 - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Primjer 5.3.7. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \ln(\sin x)$ od $x = \frac{\pi}{3}$ do $x = \frac{2\pi}{3}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 + (\ln(\sin x))'^2} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 + \left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} dx = \\
 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} dx = \\
 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left| \frac{1}{\sin x} \right| dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin x} dx = \\
 &= \left[\begin{array}{l} tg \frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ x = \frac{\pi}{3} \rightarrow t = tg \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow t = tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{array} \right] = \\
 &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t} = \ln |t| \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = \ln \sqrt{3} - \ln \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
 &= \ln \sqrt{3} - \ln \sqrt{3} + \ln 3 = \ln 3
 \end{aligned}$$

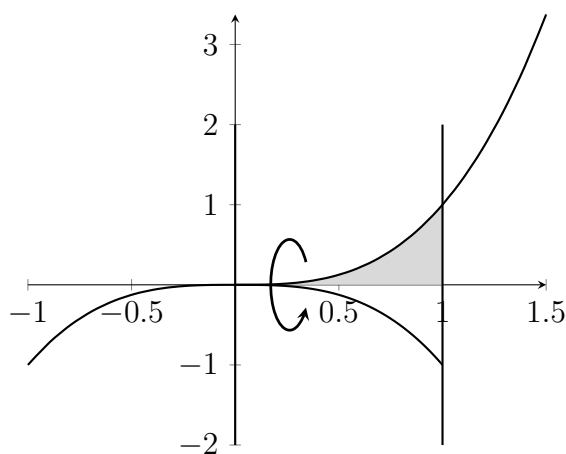
Određivanje volumena rotacijskih tijela

Volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x -osi površine omeđene grafom funkcije $y = f(x)$ i pravcima $x = a$ i $x = b$ jednak je

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Primjer 5.3.8. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x -osi površine omeđene grafom funkcije $f(x) = x^3$ i pravcima $x = 0$ i $x = 1$.

Rješenje:

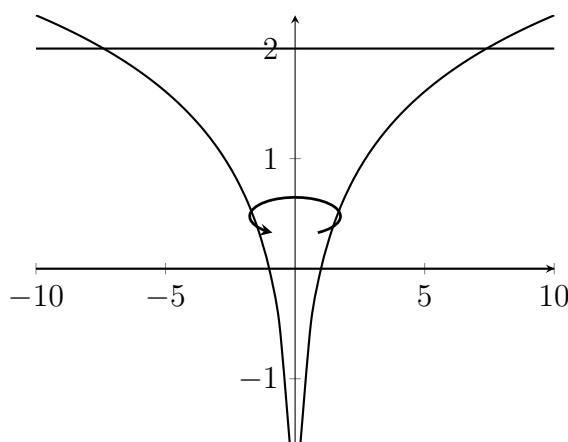


$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 (x^3)^2 dx = \pi \int_0^1 x^6 dx = \\
 &= \pi \left(\frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{7} - 0 \right) = \frac{\pi}{7} \approx 0,45
 \end{aligned}$$

Volumen tijela koje nastaje rotacijom oko y -osi površine omeđene grafom funkcije $y = f(x)$ i pravcima $y = a$ i $y = b$ jednak je

$$V = \pi \int_a^b [f^{-1}(y)]^2 dy$$

Primjer 5.3.9. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom oko y -osi površine omeđene grafom funkcije $f(x) = \ln x$ i pravcima $y = 0$ i $y = 2$.
Rješenje:



Inverzna funkcija funkcije $f(x) = \ln x$ jednaka je $f^{-1}(y) = e^y$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 e^{2y} dy = \pi \left(\frac{1}{2} e^{2y} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^0 \right) = \frac{\pi}{2} (e^4 - 1) \approx 84,19 \end{aligned}$$

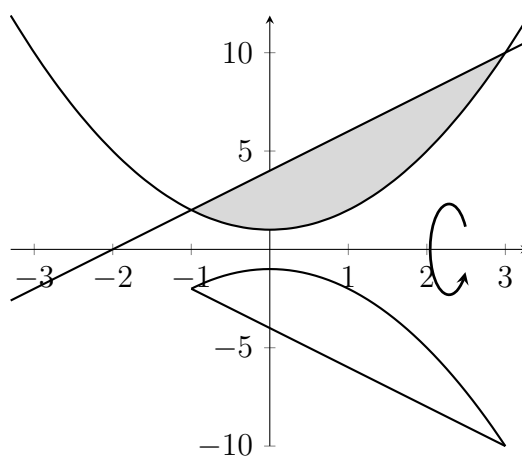
Volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x -osi površine omeđene grafovima funkcija $f(x)$ i $g(x)$ za koje vrijedi da za svaki $x \in [a, b]$ $g(x) \leq f(x)$ jednak je

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

Ako površina rotira oko y -osi tada je volumen jednak

$$V = \pi \int_a^b \left([f^{-1}(y)]^2 - [g^{-1}(y)]^2 \right) dy$$

Primjer 5.3.10. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x -osi površine omeđene grafovima funkcija $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = 2x + 4$.
Rješenje:



Granice integrala su sjecišta funkcija:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2x + 4 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x + 1)(x - 3) &= 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3 \end{aligned}$$

Volumen tijela jednak je

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-1}^3 \left[(2x+4)^2 - (x^2+1)^2 \right] dx = \\
 &= \pi \int_{-1}^3 \left[4x^2 + 16x + 16 - (x^4 + 2x^2 + 1) \right] dx = \\
 &= \pi \int_{-1}^3 \left[-x^4 + 2x^2 + 16x + 15 \right] dx = \\
 &= \pi \left[-\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + 16\frac{x^2}{2} + 15x \right] \Big|_{-1}^3 = \\
 &= \pi \left(-\frac{3^5}{5} + 2\frac{3^3}{3} + 16\frac{3^2}{2} + 15 \cdot 3 \right) - \\
 &\quad - \pi \left(-\frac{(-1)^5}{5} + 2\frac{(-1)^3}{3} + 16\frac{(-1)^2}{2} + 15 \cdot (-1) \right) \\
 &\approx 295
 \end{aligned}$$

5.3.2 Primjena određenog integrala u mehanici

Gibanje čestice

Brzina v je temeljna značajka gibanja čestice i može se shvatiti kao skraćenica za sintagmu brzine kojom se mijenja položaj čestice u vremenu. Ako se promatra promjena položaja od točke 1 do točke 2, onda se srednja brzina čestice u nekom vremenskom intervalu Δt , definira kao omjer promjene položaja čestice i proteklog vremena.

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Ako se želi izračunati trenutna brzina čestice u nekom trenutku t , onda se može zamisliti da je vremensko razdoblje Δt sve kraće, tj. da teži nuli, pri čemu se točka 2 sve više približava točki 1. Tada se gornji izraz može zapisati kao:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Dakle, radi o prvoj derivaciji pomaka po vremenu, koja predstavlja trenutnu brzinu čestice u nekom trenutku.

Na sličan način može se objasniti i ubrzanje, tj. brzina promjene brzine.

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\
 a &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}
 \end{aligned}$$

Dakle, u općem slučaju pravocrtno gibanje je definirano s izrazima:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = \int v dt$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \int a dt$$

Analogno tome, kružno gibanje je u općem slučaju definirano s izrazima:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \phi = \int \omega dt$$

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \int \epsilon dt$$

gdje je ϕ kutni pomak, ω kutna brzina, a ϵ kutno ubrzanje.

Primjer 5.3.11. Brzina vozila ($\frac{km}{h}$) koje se giba duž x-osi je dana funkcijom

$$v_x(t) = t^3 + 3\sqrt{t}$$

Nađite pomak vozila od $t_1 = 0h$ do $t_2 = 3h$.

Rješenje:

$$s = \int_0^3 (t^3 + 3\sqrt{t}) dt =$$

$$= \left(\frac{t^4}{4} + 3\frac{2}{3}\sqrt{t^3} \right) \Big|_0^3 = \frac{3^4}{4} + 2\sqrt{3^3} - \left(\frac{0^4}{4} + 2\sqrt{0^3} \right) \approx 30.64$$

Vozilo je napravilo pomak od 30.64 km.

Primjer 5.3.12. Čestica se giba po pravcu tako da joj se brzina mijenja po zakonu $v(t)$:

$$v(t) = 4t^3 + 6t$$

Vrijeme t je zadano u sekundama $[s]$, a brzina v u $[m/s]$. Potrebno je odrediti pomak u ovisnosti o vremenu $s(t)$, ako je u početnom trenutku $t_0 = 0s$ do $t_1 = 2s$.

Rješenje:

$$s = \int_0^2 (4t^3 + 6t) dt = \left(4\frac{t^4}{4} + 6\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^2 =$$

$$= (t^4 + 3t^2) \Big|_0^2 = (2^4 + 3 \cdot 2^2) - (0^4 + 3 \cdot 0^2) \approx 28m$$

Čestica je napravila pomak od 28 m.

Primjer 5.3.13. Čestica se giba po pravcu tako da joj se ubrzanje mijenja po zakonu $a(t)$:

$$a(t) = t^2 + \sqrt{t}$$

Vrijeme t je zadano u sekundama $[s]$, a ubrzanje a u $[m/s^2]$. Potrebno je odrediti zakon promjene brzine u ovisnosti o vremenu $v(t)$ i pomak u ovisnosti o vremenu $s(t)$, ako je u početnom trenutku $t_0 = 0s$ do $t_0 = 4s$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} v &= \int (t^2 + \sqrt{t}) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} \\ s &= \int_0^4 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} \right) dt = \left(\frac{t^4}{4 \cdot 3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{t^5} \right) \Big|_0^4 = \\ &= \frac{4^4}{12} + \frac{4}{15}\sqrt{4^5} - \left(\frac{0^4}{12} + \frac{4}{15}\sqrt{0^5} \right) \approx 29.86m \end{aligned}$$

Čestica je napravila pomak od 29.86 m.

Primjer 5.3.14. Čestica se giba po kružnici tako da joj se kutna brzina mijenja po zakonu $\omega(t)$:

$$\omega(t) = 0.5t^3 + \frac{3}{4}t^2 + 2$$

Vrijeme t je zadano u sekundama $[s]$, a kutna brzina ω u $[rad/s]$. Odredite promjene kuta u ovisnosti o vremenu, ako je u početnom trenutku $t_0 = 2s$ do $t_1 = 6s$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \phi &= \int_2^6 \left(0.5t^3 + \frac{3}{4}t^2 + 2 \right) dt = \left(0.5 \cdot \frac{t^4}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{t^3}{3} + 2t \right) \Big|_2^6 = \\ &= \left(\frac{t^4}{8} + \frac{t^3}{4} + 2t \right) \Big|_2^6 = \left(\frac{6^4}{8} + \frac{6^3}{4} + 2 \cdot 6 \right) - \left(\frac{2^4}{8} + \frac{2^3}{4} + 2 \cdot 2 \right) = \\ &= (162 + 54 + 12) - (2 + 2 + 4) = 220 \end{aligned}$$

Čestica je napravila kutni pomak od 220 rad.

Rad

Rad W je fizikalna veličina koja opisuje djelovanje sile F na neko tijelo na duž prijednog puta s . Elementarni rad sile W je jednak umnošku diferencijalnog pomaka ds i sile F u smjeru pomaka.

$$dW = Fds$$

Kada su zadane početna i konačna točka položaja tijela, rad sile na cijelom putu definiran je kao:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds$$

Primjer 5.3.15. Sila djeluje u smjeru gibanja tijela, te se mijenja u ovisnosti o putu prema funkciji $F(s)$:

$$F(s) = \frac{2s^2 + \sqrt{s}}{s}$$

Koliki rad obavi sila nad tijelom na putu od $s_1 = 0$ do $s_2 = 2$?

Rješenje:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^2 \frac{2s^2 + \sqrt{s}}{s} ds = \int_0^2 \left(2s + s^{-\frac{1}{2}} \right) ds = \left(2\frac{s^2}{2} + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \left(2^2 + 2\sqrt{2} \right) - \left(0^2 + 2\sqrt{0} \right) \approx 6.83 J \end{aligned}$$

Sila je obavila rad nad tijelom od 6.83 J.

Primjer 5.3.16. Na putu s na tijelo djeluje sila F paralelna s podlogom. Sila se mijenja u ovisnosti o putu prema funkciji:

$$F(s) = \cos s + 2$$

Koliki rad obavi sila nad tijelom na putu od 720 m?

Rješenje:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{720} (\cos s + 2) ds = (\sin s + 2s) \Big|_0^{720} = \\ &= (\sin 720 + 2 \cdot 720) - (\sin 0 + 2 \cdot 0) = 1440 J \end{aligned}$$

Impuls sile

Impuls sile definira se kao umnožak sile i vremena tijekom kojeg je ta sila djelovala, tj. kao karakteristika djelovanja jedne sile na neko tijelo tijekom vremenskog intervala. Elementarni impuls sile podrazumijeva djelovanje sile za beskonačno kratki vremenski interval:

$$dI = F dt$$

Impuls sile za konačni vremenski interval izračunava se kao zbroj odgovarajućih elementarnih impulsa. Jedinica za impuls sile je Ns (Newton sekunda).

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

Primjer 5.3.17. Sila djeluje u smjeru gibanja tijela, te se mijenja u ovisnosti o vremenu prema funkciji $F(t)$:

$$F(t) = 2t^3 + 3t^2 + t + 1$$

Koliki je impuls sile u vremenu od $t_1 = 5$ do $t_2 = 10$? Mjerna jedinica za Impuls sile je newton sekunda $[Ns]$, sila je zadana u newtonima $[N]$, a vrijeme u sekundama $[s]$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} I &= \int_5^{10} (2t^3 + 3t^2 + t + 1) dt = \left(2\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_5^{10} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 10^4 + 10^3 + \frac{10^2}{2} + 10 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 5^4 + 5^3 + \frac{5^2}{2} + 5 \right) = 5605Ns \end{aligned}$$

Impuls sile iznosi 5605 Ns .

5.4 Zadaci za vježbu

Zadatak 5.4.1. Primjenom odgovarajuće metode izračunajte sljedeće integrale:

(a) $\int (6x^6 + 4x^3 - 7x^2 + 3x + \frac{5}{x}) dx$

(b) $\int (\cos x - 5x + 4e^x - 1) dx$

(c) $\int \frac{(x+3)(x-2)}{x} dx$

(d) $\int \frac{2x}{x^2-1} dx$

(e) $\int \sin(5x - 4) dx$

(f) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx$

(g) $\int e^x (x + 3) dx$

(h) $\int (x^2 - 1) \cos x dx$

Rješenje:

$$(a) \frac{6}{7}x^7 + x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5 \ln |x| + C$$

$$(b) \sin x - \frac{5}{2}x^2 + 4e^x - x + C$$

$$(c) \frac{1}{2}x^2 + x - 6 \ln |x| + C$$

$$(d) \ln |x^2 - 1| + C$$

$$(e) -\frac{1}{5} \cos(5x - 4) + C$$

$$(f) \ln |x + \sin x| + C$$

$$(g) e^x(x + 3) - e^x + C$$

$$(h) (x^2 - 1) \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + C$$

Zadatak 5.4.2. Primjenom metode supstitucije izračunajte sljedeće integrale:

$$(a) \int e^{5 \cos x} \cdot \sin x \, dx$$

$$(b) \int \cos(\cos^2 x + 1) \cdot \cos x \cdot \sin x \, dx$$

$$(c) \int \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2} \, dx$$

$$(d) \int \sqrt{x^2 + 3x + 1}(2x + 3) \, dx$$

Rješenje:

$$(a) \frac{-1}{5} e^{5 \cos x} + C$$

$$(b) -\frac{1}{2} \sin(\cos^2 x + 1) + C$$

$$(c) \ln |e^x + x^2| + C$$

$$(d) \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 + 3x + 1)^3} + C$$

Zadatak 5.4.3. Primjenom metode parcijalne integracije izračunajte sljedeće integrale:

$$(a) \int e^x (x^2 + 2) \, dx$$

$$(b) \int (x^2 - x - 2) e^x \, dx$$

$$(c) \int x^2 \cdot \sin x \, dx$$

(d) $\int (x^2 + 2x) \cdot \sin x \, dx$

(e) $\int (x^2 + 5x + 3) \cdot \cos x \, dx$

(f) $\int (x + 2) \ln x \, dx$

(g) $\int (x^2 - x - 1) \ln x \, dx$

(h) $\int (5x^4 + 3x^2) \arctan x \, dx$

Rješenje:

(a) $e^x (x^2 + 2) - 2xe^x + 2e^x + C$

(b) $(x^2 - x - 2) e^x - (2x - 1) e^x + 2e^x + C$

(c) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + \cos x + C$

(d) $-(x^2 + 2x) \cos x + (2x + 1) \sin x + 2 \cos x + C + C$

(e) $(x^2 + 5x + 3) \sin x + (2x + 5) \cos x - 2 \sin x + C + C$

(f) $\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) \ln x - \frac{x^2}{4} - 2x + C$

(g) $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + x + C$

(h) $(x^5 + x^3) \arctan x - \frac{x^4}{4} + C$

Zadatak 5.4.4. Primjenom odgovarajuće metode izračunajte sljedeće integrale:

(a) $\int \frac{x}{2x^2 + 2x + 5} \, dx$

(b) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \, dx$

(c) $\int \operatorname{ctg} x \, dx$

(d) $\int \frac{dx}{(x+3)^4}$

(e) $\int \frac{4dx}{(5x-3)^4}$

(f) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x - 7}$

(g) $\int \frac{x-2}{x^2+2x-3} \, dx$

(h) $\int \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \cos x} \, dx$

Rješenje:

$$(a) \frac{1}{4} \ln |2x^2 + 2x + 5| - \frac{1}{6} \arctan \frac{2x+1}{3} + C$$

$$(b) \arctan (\sin x) + C$$

$$(c) \ln |\sin x| + C$$

$$(d) -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+3)^3} + C$$

$$(e) -\frac{4}{15} \cdot \frac{1}{(5x-3)^3} + C$$

$$(f) \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-7}{x+1} \right| + C$$

$$(g) \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x - 3| - \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C$$

$$(h) \frac{1}{2} t g^2 \frac{x}{2} + C$$

Zadatak 5.4.5. Riješite sljedeće integrale rastavom na parcijalne razlomke:

$$(a) \int \frac{dx}{x^2-5x-6}$$

$$(b) \int \frac{4x-1}{x^3-3x-2} dx$$

$$(c) \int \frac{2-4x^2}{x^3-x} dx$$

$$(d) \int \frac{3x^4+2x^2+1}{x(x^2+1)^2} dx$$

Rješenje:

$$(a) \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x-6}{x+1} \right| + C$$

$$(b) \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| - \frac{1}{x+1} + C$$

$$(c) -\ln |x^4 - x^2| + C$$

$$(d) \ln |x^3 + x| - \frac{1}{x^2+1} + C$$

Zadatak 5.4.6. Primjenom odgovarajuće metode izračunajte sljedeće integrale:

$$(a) \int_2^3 3x^2 dx$$

$$(b) \int_{-2}^3 5x^3 dx$$

$$(c) \int_{-1}^2 (x^3 - 6x^2 + 2x - 3) dx$$

(d) $\int_0^{2\pi} |\sin^3 x| \, dx$

(e) $\int_1^e \frac{\ln x + 5}{x} \, dx$

(f) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$

(g) $\int_{-2}^0 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} \, dx$

(h) $\int_{-1}^0 2e^{x^2} x \, dx$

Rješenje:

(a) 19

(b) $81\frac{1}{4}$

(c) $-20\frac{1}{4}$

(d) $\frac{8}{3}$

(e) $\frac{11}{2}$

(f) $\frac{1}{3}$

(g) $-\frac{8}{21}$

(h) $e - 1$

Zadatak 5.4.7. Primjenom metode parcijalne integracije izračunajte sljedeće integrale:

(a) $\int_1^e \ln x \, dx$

(b) $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$

(c) $\int_0^1 (x^2 - 2) e^x \, dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(x+1)} \sin x \, dx$

(e) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x+1) \sin x \, dx$

(f) $\int_0^1 \arctan x \, dx$

(g) $\int_0^3 x \arctan x \, dx$

(h) $\int_0^3 \arcsin x \, dx$

Rješenje:

(a) 1

(b) $\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$

(c) $-e$

(d) $\frac{e}{2} \left(e^{\frac{\pi i}{2}} - 1 \right)$

(e) π

(f) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

(g) $5 \arctan 3 - \frac{3}{2}$

(h) $\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

Zadatak 5.4.8. Odredite površinu lika omeđenog krivuljama:

(a) $y = x^2 + 1, y = x - 1$

(b) $y = 2x - x^2, y = -x$

(c) $y = -x^2 + 6x - 8, y = 2x - 5$

(d) $y = x^2 - 3x - 4, y = -x - 1$

(e) $y = x^2 - 1, y = -x^2 + x + 2$

(f) $y = x^2 + 4x - 5, y = -x^2 - 2x + 3$

(g) $y^2 - 2x - 1 = 0, x - y - 1 = 0$

(h) $y = \sqrt{x}, y = x^2$

Rješenje:

(a) $4\frac{1}{2}$

(b) $4\frac{1}{2}$

(c) $1\frac{1}{3}$

(d) $10\frac{2}{3}$

(e) $10\frac{5}{24}$

(f) $41\frac{2}{3}$

(g) $5\frac{1}{3}$

(h) $\frac{1}{3}$

Zadatak 5.4.9. Izračunajte duljinu luka krivulje $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ od $x = 1$ do $x = e$.

Rješenje: $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

Zadatak 5.4.10. Izračunajte duljinu luka krivulje $f(x) = \ln \cos x$ od $x = 0$ do $x = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje: $\ln(2 + \sqrt{3})$

Zadatak 5.4.11. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x -osi površine omeđene grafovima funkcija $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = x + 1$.

Rješenje: $\frac{\pi}{6}$

Zadatak 5.4.12. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x -osi površine omeđene grafom funkcije $f(x) = 2x^2$ i pravcima $x = 2$ i $x = 4$.

Rješenje: $\frac{3968\pi}{5}$

Zadatak 5.4.13. Brzina vozila ($\frac{km}{h}$) koje se giba duž x -osi je dana funkcijom $v_x(t) = 3t^2 + 7\sqrt{t^5}$. Nađite pomak vozila od $t_1 = 0h$ do $t_2 = 2h$.

Rješenje:

Vozilo je napravilo pomak od 30.63 km.

Zadatak 5.4.14. Brzina vozila ($\frac{km}{h}$) koje se giba duž x -osi je dana funkcijom $v_x(t) = \frac{2t^2 + \sqrt{t}}{t}$. Nađite pomak vozila od $t_1 = 0h$ do $t_2 = 4h$.

Rješenje:

Vozilo je napravilo pomak od 20 km.

Zadatak 5.4.15. Na tijelo djeluje sila paralelna s podlogom, te se mijenja u ovisnosti o prijeđenom putu. Funkcija koja opisuje promjenu sile je $F = 2s + 1$. Koliki rad obavi sila nad tijelom na putu od 1 metra?

Rješenje:

Sila nad tijelom obavi rad od 2J.

Literatura

- [1] B. Apsen. *Riješeni zadaci više matematike 1*. 8. izd. Tehnička knjiga Zagreb., 2003. ISBN: 953-172-015-0.
- [2] B. Apsen. *Riješeni zadaci više matematike 2*. XI. izdanje. Tehnička knjiga Zagreb., 1991. ISBN: 86-7059-137-5.
- [3] N. Bakić and A. Milas. *Zbirka zadataka iz linearne algebre*. Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu., 1995. ISBN: 953-6076-61-6.
- [4] T. Bradic et al. *Matematika za tehnološke fakultete*. XI. izdanje. Element Zagreb., 2006. ISBN: 978-953-6098-82-8.
- [5] I.N. Bronstein et al. *Matematički priručnik*. IV izdanje. Tehnička knjiga Zagreb., 2004. ISBN: 953-212-176-5.
- [6] L. Čaklović. *Zbirka zadataka iz linearne algebre*. Školska knjiga Zagreb., 1979.
- [7] B.P. Demidovič. *Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za tehničke fakultete*. VII izdanje. Tehnička knjiga Zagreb., 2003. ISBN: 953-212-149-8.
- [8] K. Horvatić. *Linearna algebra I. dio*. VIII izdanje. Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu., 1999. ISBN: 953-6076-63-2.
- [9] K. Horvatić. *Linearna algebra II. dio*. VIII izdanje. Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu., 1999. ISBN: 953-6076-64-0.
- [10] S. Kurepa. *Matematička analiza I*. II izdanje. Školska knjiga Zagreb., 1997. ISBN: 953-0-30849-3.
- [11] S. Kurepa. *Matematička analiza II*. I izdanje. Školska knjiga Zagreb., 1997. ISBN: 953-0-30853-1.
- [12] S. Marušić. *Matematika I*. II izdanje. Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti., 2007. ISBN: 978-953-243-018-9.
- [13] B. Pavković and D. Veljan. *Elementarna matematika I*. Tehnička knjiga Zagreb., 1991. ISBN: 86-7059-175-8.

- [14] B. Pavković and D. Veljan. *Elementarna matematika II*. Školska knjiga Zagreb., 1995. ISBN: 953-0-30810-8.
- [15] A. Perišić and K. Devčić. *Matematika s primjenom u ekonomiji*. Veleučilište u Šibeniku., 2016. ISBN: 978-953-7566-31-9.
- [16] S. Skok and D. Brkić-Mikulić. *Zbirka zadataka iz matematike*. Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti., 2000. ISBN: 953-6221-09-8.
- [17] M. Tevčić. *Zbirka zadataka iz matematike I*. Veleučilište u Karlovcu., 2007. ISBN: 978-953-7343-11-8.
- [18] M. Tevčić. *Zbirka zadataka iz matematike II*. Veleučilište u Karlovcu., 2010. ISBN: 978-953-7343-36-1.